ESCHER E O ENSINO DA GEOMETRIA[1]

Dayene Ferreira dos SANTOS[2]
Discente do Curso de Licenciatura em Matemática
IFSP/*Campus* São Paulo

José Maria CARLINI[3]
Mestre em História da Ciência/PUC-SP
Docente do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico /IFSP – *Campus* São Paulo

RESUMO

O presente artigo descreve brevemente sobre a vida e as obras de Escher, um artista gráfico holandês conhecido por suas construções impossíveis e uma visão paradoxal que une a Matemática e a Arte. O foco dentre as várias fases da carreira do artista será a fase *Metamorfose* por ser a que mais trabalha os diversos conceitos geométricos. Com base em fontes de sites oficiais, livros e artigos físicos que tratam do assunto abordado, o principal objetivo deste estudo é a apresentação de atividades que poderão ser realizadas em sala de aula para ensinar alguns conceitos geométricos, como simetrias e poliedros de Platão. Além disso, também é finalidade deste fazer refletir sobre as práticas docentes que podem explorar outras áreas do conhecimento. Por fim, apresentamos uma análise reflexiva acerca do estudo realizado.

Palavras-chave: Escher. Conceitos Geométricos. Metamorfose.

Introdução

Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês mundialmente famoso por suas construções impossíveis e as diversas gravuras repletas de ilusões de ótica. Escher ousava com o uso de formas geométricas em suas obras, sobrepondo-as de modo que a ilustração retratasse vários cenários ou personagens de uma só vez.

As obras deste artista são peculiares e facilmente reconhecíveis. Muitos admiradores realizam homenagens e exposições sobre ele. A maior parte do acervo do artista estava em sua própria fundação, “M.C. Escher Foundation”, desde 1968 até 1981, sendo que neste ano um negociante de arte comprou boa parte das obras e, hoje, estão espalhadas pelo mundo (M.C.E. FOUNDATION, 2016).

---

[1] Resultado de Trabalho de Conclusão de Curso, orientado pelo Prof. José Maria Carlini.
[2] Endereço eletrônico: dayene.f.santos.job.esc@gmail.com
[3] Endereço eletrônico: prof.jmcarlini@gmail.com

O trabalho de Escher se dividiu em várias fases durante sua carreira. Para o desenvolvimento deste artigo, resgatamos as características da fase chamada *Metamorfose*, em que o artista recreava com as formas geométricas, transformando-as em outros objetos, compondo cenários distintos dentro de uma mesma gravura.

Além disso, relacionamos conceitos geométricos que são perceptíveis nessas gravuras e apresentamos atividades que desfrutem das propriedades envolvidas nas obras como uma alternativa para o ensino desses conceitos.

A pesquisa realizada para a elaboração deste artigo é do tipo qualitativa com consulta aos livros e trabalhos acadêmicos relacionados ao tema, sendo que alguns destes se encontram disponíveis pela internet. Foram selecionadas fontes que tratam sobre a vida e obras de Escher e a relação existente entre suas obras e a Matemática[4]. Essas atividades foram selecionadas de acordo com o tema e, além disso, de acordo com o objetivo educacional que buscamos, sendo este o de mostrar como o uso das obras de Escher auxilia na construção de conceitos matemáticos, em especial, conceitos da geometria.

Este artigo é composto por quatro partes: na primeira, descrevemos as principais características da fase *Metamorfose* que teve influência dos mosaicos mouros vistos quando Escher visitou o Palácio de Alhambra, Espanha. Na segunda, definimos os conceitos geométricos envolvidos na construção das gravuras e como Escher usufruía da Matemática para compor suas obras, ainda que o artista não tivesse esta intenção. Em seguida, com base em documentos publicados por professores da área, apresentamos algumas atividades que podem ser aplicadas em sala de aula. Por último, concluímos o artigo com reflexões acerca das contribuições que as obras de Escher trazem para a educação matemática.

Metamorfose: Escher e a transformação dos objetos

Maurits Cornelis Escher nasceu em 17 de junho 1898, na cidade de Leenwarden, norte da Holanda. Filho de Sarah Gleichman e de George Arnold Escher, engenheiro

[4] Para a consecução de nossa pesquisa, as atividades foram selecionadas dos sites http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/claudia_fiuza.pdf e http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463, cujos acessos foram feitos em 15 nov.2016, e propiciou o que mostramos no decorrer deste artigo.

civil, teve contato com a arte da carpintaria desde cedo, aprendendo técnicas valiosas nos trabalhos com madeira que, mais tarde, seriam úteis para a construção das xilogravuras.

Ironicamente, conforme salienta Acevedo (2007), Escher não foi um bom aluno nas escolas que frequentou. Primeiramente, na escola secundária de Arnhem, para onde se mudou com seus pais em 1903, não obteve sucesso e por isso não conseguiu o diploma. Quando cursou arquitetura na Escola de Artes Decorativas do Haarlem[5], aos 21 anos, também não foi bem sucedido e muitos afirmaram que ele não seria capaz de dominar as técnicas de nenhuma arte. Nessa escola, conheceu o professor e amigo Samuel Jessurun de Mesquita[6] que o apoiou a fazer as xilogravuras, sendo um dos poucos que reconhecia o talento do jovem desenhista gráfico.

Embora Escher tenha abandonado o curso, de acordo com Barth (2006), ainda manteve contato com Mesquita até o dia em que este sofreu com o preconceito nazista por ser judeu. Escher continuou o seu trabalho buscando inspiração nas obras de seu professor e melhor amigo, que também foi desenhista gráfico. Viajou para vários países, como Itália e Espanha, lugares onde sofreu grandes influências das artes locais.

Durante sua viagem à Espanha, em 1922, segundo Locher (1993), se encantou com os mosaicos mouros do Palácio de Alhambra[7], como ele mesmo descreve: "... a coisa estranha para mim foi a grande riqueza de decoração e a grande dignidade e simples beleza do todo..." (ESCHER citado por LOCHER, 1993, p. 23; Seminário, 2001). Escher se referiu aos detalhes exacerbados que os mosaicos e azulejos islâmicos traziam, fazendo uso de formas geométricas, geralmente, regulares. Os encaixes entre as

[5] Haarlem é uma cidade da Holanda do Norte. Localizada nas margens do rio Spaarne, tem sido referenciada por conta da produção de tulipas e, por isso, mantém o nome de 'Bloemenstad' (cidade das flores). Fonte: http://www.mochileiros.com/haarlem-guia-de-informacoes-t72961.html. Acesso em 15 nov.2016.

[6] Samuel Jessurun de Mesquita (Amsterdam, 6 de Junho 1868 - Auschwitz, 2 de Novembro 1944) foi um artista gráfico holandês conhecido pelas suas xilogravuras, litografias que representam as explorações o infinito e padrões geométricos. Samuel foi o responsável por M.C. Escher abandonar a Escola de Arquitetura e Artes Decorativas para se aventurar nas artes gráficas, tornando-se seu mestre. Fonte: https://www.acta.es/medios/articulos/biografias_y_personajes/045061.pdf . Acesso em 15 nov.2016.

[7] Alhambra (em árabe: ال حمراء"; a Vermelha") localiza-se em Granada, Espanha. É um rico complexo de palácios e fortalezas construído durante a Dinastia Nasrida e a corte do Reino de Granada. O que mais chama a atenção são os azulejos e a arte islâmica que decoram o interior dos palácios. Fonte: http://passeioseroteiros.com.br/alhambra-a-cidade-murada-em-granada/ . Acesso em 15 nov.2016.

formas eram feitos propositalmente, preenchendo toda a superfície, como mostra a Figura 1:

Figura 1 - "Passarinhos" - Interior do Palácio de Alhambra
Fonte: http://www.icarabe.org/entrevistas/a-arquitetura-arabe-no-apogeu-do-isla.
Acesso em 23 mar.2017.

O Palácio de Alhambra tem jardins e salões riquíssimos em detalhes. Essas composições, como observa Barth (2006), inspiraram Escher que começou a estudar mais profundamente os conceitos matemáticos envolvidos nas construções dos padrões encontrados nos mosaicos mouros. Observamos na Figura 2 os detalhes do interior do palácio:

Figura 2 - "Interior do Palácio de Alhambra" - Detalhe das colunas.

Fonte: https://www.redbubble.com/people/lesm/works/2538578-plaza-de-leones-alhambrapalace-granada-spain.
Acesso em 23 mar.2017.

Os estudos de Escher mostraram a forte existência de propriedades matemáticas nos desenhos mouros. O seu encantamento pelas construções do povo árabe foi inegável, como se constata em suas anotações:

> Os Árabes eram mestres nesta arte. Eles decoraram, em especial em Alhambra, na Espanha, paredes e pavimentos com peças de majólica coloridas e congruentes, que foram ajustadas umas às outras, de forma contínua. Que pena que a religião islâmica lhes proibisse a representação de imagens! Nos seus ornamentos com azulejos, limitaram-se sempre a figuras de formas abstracto-geométricas. Tanto quanto é do meu conhecimento, nenhum artista árabe arriscou alguma vez (ou nunca lhe teria vindo à ideia?), usar como elemento para preenchimento de superfícies, figuras concretas, perceptíveis e existentes na Natureza, como peixes, aves, répteis e pessoas. Esta limitação é para mim tanto mais incompreensível, quanto o reconhecimento das componentes dos meus padrões é a razão do interesse que mantenho vivo neste campo. (ESCHER, 1994, p. 7)

Conforme Barth (2006), diante das observações feitas sobre a arte moura, Escher resgata as suas principais características e constrói gravuras enigmáticas, sobrepondo formas, colorindo com a paleta de cores mais utilizada pelos árabes. Com o passar dos anos, após sua visita à Alhambra e aperfeiçoamento de suas técnicas, o artista principia a fase nomeada *Metamorfose*, 1937 a 1945, iniciada pela gravura *Metamorfose I* (Figura 3).

A principal característica desta fase é a transformação das figuras. O artista utiliza dois ou mais elementos (representações de objetos , formas geométricas, animais, entre outros) como principais em suas obras e é possível observar que, a partir da alteração de um desses elementos, Escher consegue transformá-lo em outro elemento, como uma lagarta se transforma em uma borboleta. Valendo-nos do Dicionário Online de Português (2016), buscamos o que significa metamorfose: “mudança ou alteração completa no aspecto, natureza ou estrutura de alguém ou de alguma coisa; transformação”, a fim de corroborar a ideia de metamorfose desta fase de Escher.

As ilustrações da *Metamorfose* são marcadas por combinar figuras e elementos similares em suas formas para que possam ser combinadas, deformando-as com o intuito de torná-las outras figuras. Animais, objetos e paisagens foram os elementos mais representados. Nesse sentido, como observa Rohde (1997), as figuras utilizadas por Escher preenchem a superfície, transformam-se e revelam surpresas um tanto enigmáticas. A seguir, as principais obras desta fase:

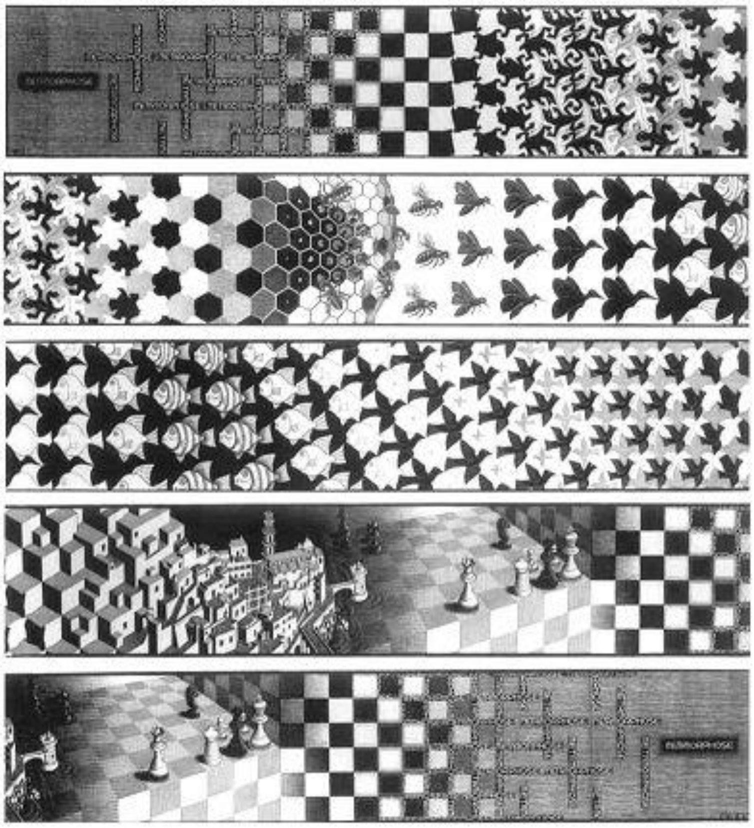

Figura 3 – "Metamorfose II" - 1939 /1940
Fonte: Adaptada de http://www.mcescher.com/gallery/switzerland-belgium/metamorphosis-ii/

É possível observar que, na parte superior, os segmentos de reta se transformam em uma malha quadriculada que, por meio de complementação e rotação das figuras, se transformam em lagartos. Em seguida, os lagartos, que nas obras de Escher são feitos a partir de quadrados ou hexágonos rotacionados, se transformam numa espécie de colmeia de onde as abelhas saem e tornam-se mariposas. As mariposas juntas formam peixes que, por sua vez, desenham o formato de aves. As aves transformam-se em cubos que se estendem para a construção de parte de uma cidade italiana onde Escher viveu. A torre assemelha-se à peça do tabuleiro de xadrez que, finalmente, volta à malha quadriculada e se desfaz em segmentos de reta.

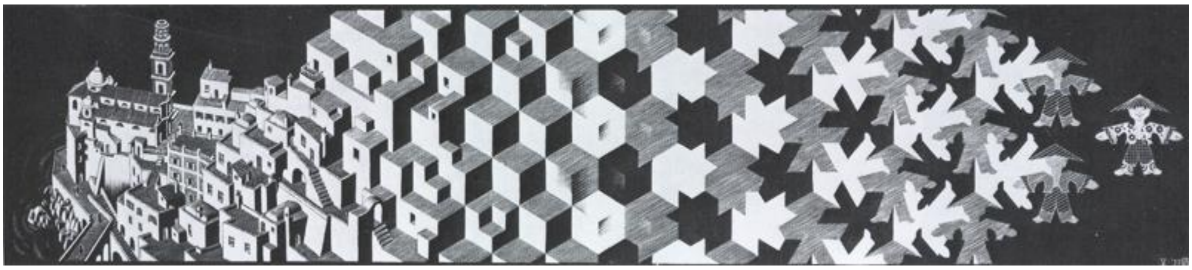

Figura 4 –" Metamorfose I "- 1937
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/switzerland-belgium/metamorphosis-i/

Nesta obra, anterior à apresentada na Figura 3, Escher explorou a rotação de figuras planas, levando a cena para uma terceira dimensão ainda que tudo esteja no plano bidimensional.

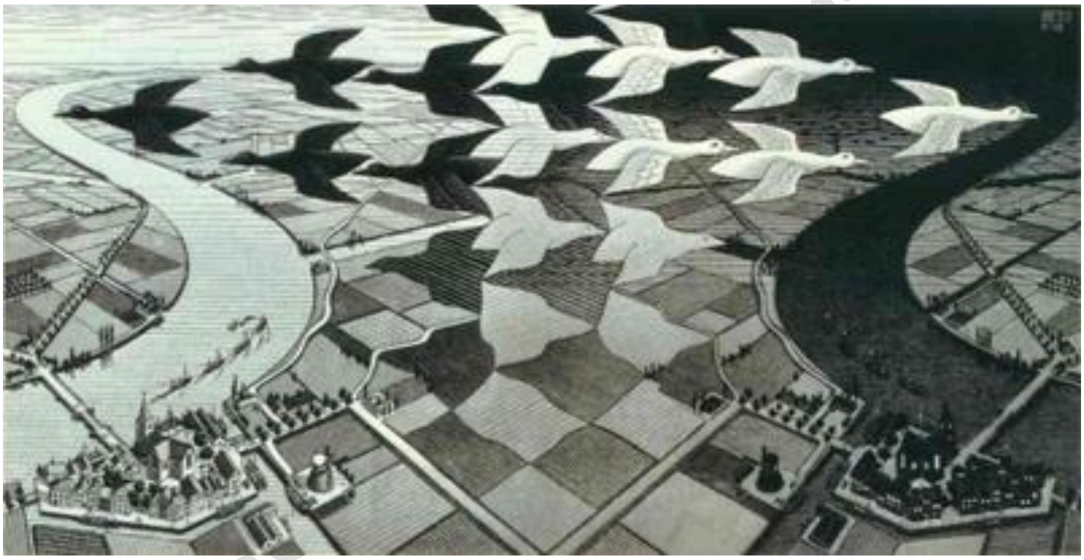

Figura 5 - "Dia e Noite" – 1938
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/switzerland-belgium/day-and-night/

O contraste entre claro e escuro está bem representado na obra acima. Além disso, as aves surgem a partir da deformação de quadrados que representam a terra e se complementam formando a visão dupla de um mesmo local: dá a entender que o lado esquerdo, onde supostamente nasce o sol, está de dia enquanto, no lado direito, onde o sol se põe, está de noite.

Observa-se que as obras iniciam em um elemento que se transforma ao longo da gravura. Muitas vezes, os objetos e seres representados foram inspirados na realidade e no cotidiano do artista. De acordo com Barth (2006, p. 82), as "representações gráficas, a estrutura, a lógica e a relação com a realidade são totalmente conscientes e propositais; são enigmáticas e escondidas”. Escher criava mundos absurdos com base na realidade que ele observava, como atesta Ernst (1991):

> Escher criou mundos não existentes de forma completamente diferente, não silenciando a razão com as suas composições, mas exatamente levando-a a intervir na construção do mundo absurdo. É assim que ele cria dois ou três mundos que existem ao mesmo tempo num só lugar. (ERNST, 1991, p. 64)

A tendência desta fase se manifesta nas obras seguintes.

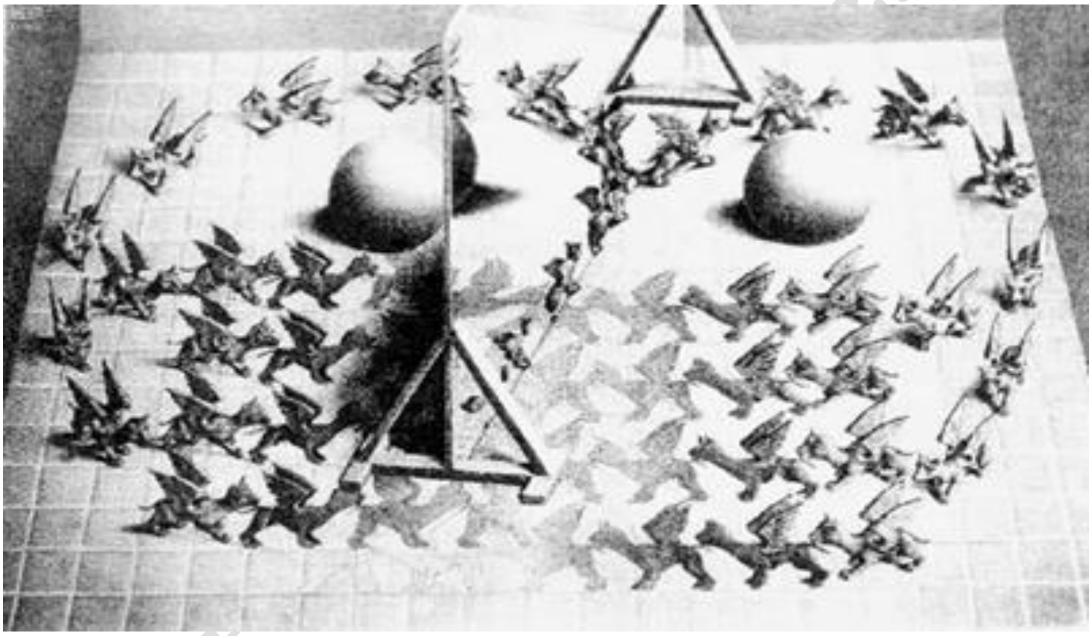

Figura 6 - “Espelho Mágico” – 1946
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/back-in-holland/magic-mirror/

A obra *Espelho Mágico* mostra a transformação de quadrados em dragões brancos e pretos que caminham em sentidos opostos, porém são reflexos um dos outros, assim como ocorre o reflexo de um espelho. Sem contar que o dilema de as figuras serem de duas ou três dimensões aparece fortemente.

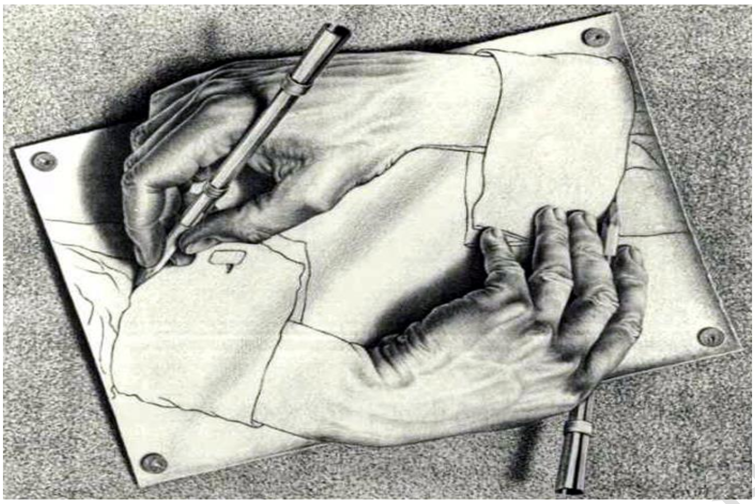

Figura 7 - "Desenhando-se" – 1948

Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/back-in-holland/drawing-hands/

Em *Desenhando-se*, Escher, além de utilizar os conceitos de simetria e rotação, também faz uma metáfora entre criação e criador. É uma das obras mais famosas do artista. Dessa maneira, podemos notar que Escher se utilizava, em suas obras, de alguns conceitos da Matemática, especialmente da Geometria, para compô-las. Conforme Barth (2006, p. 79), Escher "percebia as formas, foi capaz de pensar geometricamente; manifestar na arte a matemática".

Escher e os conceitos matemáticos

O fascínio do desenhista pelas construções mouras o aproximou dos conceitos matemáticos que são a base das suas obras. As teorias que envolvem o infinito, os sólidos platônicos, as rotações e translações, simetrias, perspectivas e outras têm presença marcante nas gravuras. Mais uma vez, a ironia se apresenta: Escher também não foi um bom aluno na área das Exatas, embora reconheça que mais se assemelha a um matemático do que um artista, como explicitado abaixo:

> ... apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exactas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas ... confrontando os enigmas que nos rodeiam e considerando e analisando as observações que fazia, terminei nos territórios da Matemática... (ESCHER, 1967 citado por APM, 1998, p. 9)

Apesar dos estudos feitos pelo desenhista gráfico, algumas das suas obras acabam desafiando o âmbito da razão, onde se encontra a Matemática. Isso seria um problema caso não se tratasse de uma arte: a emoção, os conflitos ideológicos e os sentimentos fazem parte do reino das Artes. Escher criou um vínculo entre a racionalidade e o emotivo, de modo tão perfeitamente fundido que não é possível observar uma ou outra área separadamente; em outras palavras, como assegura Ernst (1991), as dimensões espaciais passaram para o plano bidimensional de modo espantoso, pois mostraram construções impossíveis de existir no espaço.

Quando Escher compôs suas obras, propositalmente se preocupou em evidenciar alguns enigmas que despertassem a imaginação de qualquer observador, ainda que fosse difícil compreender o que estava sendo representado; contudo, como afirma Barth (2006), sua intenção não era fazer com que o observador desvendasse os enigmas, mas se encantasse com eles, embora as situações representadas fossem naturalmente racionais para Escher.

Enxergar e compreender as representações escherianas de uma realidade inacessível é uma tarefa, a princípio, confusa e atraente, a nosso ver. A exposição de figuras geométricas peculiares e inexistentes nos coloca contra antigos conceitos, como se nos levasse a questionar se um cubo, por exemplo, tem mesmo as propriedades descritas na geometria euclidiana ou se é possível que o sólido exista em outra dimensão.

Alguns dos conceitos matemáticos envolvidos serão apresentados a seguir. Inicialmente, o conceito do infinito é muito trabalhado nas obras de Escher por conta da admiração do próprio artista pela ideia do "algo sem fim".

"Ao infinito e além…"

A admiração de Escher pelo infinito está explícita em sua própria fala:

> ... não podemos imaginar que algures por detrás da estrela mais longínqua do céu nocturno, o espaço possa ter um fim, um limite para além do qual nada mais existe. O conceito de vácuo diz-nos ainda alguma coisa, pois um espaço pode estar vazio (...), mas a nossa força de imaginação é incapaz de apreender o conceito de nada no sentido

> de ausência de espaço… (ESCHER, 1959 citado por ERNST, 1978, p. 102)

O efeito de infinito foi alcançado graças ao uso de diagramas. Escher divide superfícies, como quadrados, em proporção (essa técnica lembra a representação geométrica da sequência de Fibonacci). Nota-se como isso é conseguido através do diagrama a seguir:

Figura 8 "Limite quadrado" – 1964
Fonte: Vedhuysen, 2006, p. 68.

Seguindo essa ideologia, é possível fazer trabalhos interessantes como mostrado na Figura 9.

Figura 9 - "Cada Vez Mais Pequeno I"
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/smaller-and-smaller/

Além de quadrados, séries espirais logarítmicas também foram exploradas por Escher. Um exemplar desse grupo é mostrado na Figura 11, em que o artista não se preocupa apenas em representar algo infinitamente pequeno ou grande; existe uma analogia entre o desenvolvimento biológico do ser representado, no caso, o peixe.

Figura 10 - "Construção de Senda da Vida II "
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/, 2011.

Figura 11 - "Senda da Vida II" – 1958
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/

Ao reparar, o peixe branco que "nasce" no centro da gravura vai crescendo até atingir seu tamanho máximo (parte azul). Continuando a mesma linha da espiral, o peixe branco torna-se cinza e vai "decrescendo" conforme fica mais velho (parte vermelha). Essa representação é bem próxima do que ocorre na realidade com a vida de um peixe, conforme Seminário (2011).

Outro grupo de obras são as gravuras de Coxeter. A inspiração veio após Escher ler um livro de Donald Coxeter[8], um matemático que contribuiu principalmente na área da geometria. A série de obras intituladas "limite circular" são resultados da utilização da ideia apresentada por Coxeter, como vemos nas figuras a seguir.

Figura 12 - "Limite Circular I" - 1958[9]

Figura 13 - " Limite Circular II" – 1958[10]

[8] Harold Scott MacDonald Coxeter foi um matemático canadense nascido na Inglaterra. Sua área de pesquisa foi a geometria, tendo se dedicado, especialmente, ao estudo de polígonos regulares. Fonte: http://elpais.com/diario/2003/04/07/agenda/1049666408_850215.html. Acesso em 15 nov.2016.
[9] Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iv/. Acesso em 15 nov.2016.
[10] Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iii/. Acesso em 15 nov.2016.

Escher se aperfeiçoou de tal maneira que estendeu a ideia do limite circular de Coxeter e implementou outros elementos, sem abandonar a natureza da teoria. A Figura 14 mostra uma das últimas gravuras feitas por Escher e nela é possível observar que há o conceito de infinito e proporção quando olhamos para o interior do círculo, porém as três serpentes ao redor mostram uma simetria triangular, em que o círculo está dividido em 3 partes iguais, o que diferencia esta obra das anteriores (SEMINÁRIO, 2011):

Figura 14 - “Serpentes” – 1969
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/snakes/

Outro conceito também muito explorado por Escher foi o de objetos côncavos e convexos em que a sobreposição destes parece colocar duas cenas em uma única; na próxima seção, tratamos desses aspectos.

Côncavo e convexo

Escher é reconhecido por construir dilemas com suas obras. Utilizando os conceitos de côncavo e convexo, o artista alcançou a fronteira de todas as possíveis interpretações que se pode ter ao observar uma de suas obras. Obviamente, toda a indefinição que se tem ao visualizar uma gravura de Escher foi propositalmente exposta a fim de tornar a obra não apenas intrigante, mas que levasse à reflexão. Um exemplar desse tema é a obra “Côncavo e Convexo” (Figura 15) que mostra justamente a ambiguidade na forma de um mesmo objeto: os tons mais escuros representam partes côncavas enquanto os mais claros são partes convexas, mas o oposto também é válido.

Figura 15 - "Côncavo e Convexo" – 1955
Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/convex-and-concave/

Utilizando os conceitos opostos, tais como côncavo e convexo, Escher fez gravuras ainda mais enigmáticas. As suas construções impossíveis são exemplos de como as ideias opostas podem fazer parte de uma mesma cena e tornar tudo mais intrigante, convidando o observador a ver a obra repetidas vezes, como atesta Barth (2006).

Construções impossíveis

As formas geométricas impossíveis são uma marca de Escher. A ideologia de construir uma figura comum, porém improvável, foi adaptada e inserida nas chamadas "construções impossíveis". O artista dominou as técnicas da ilusão de ótica, utilizando-se de conceitos geométricos familiares como a simetria e a rotação.

De acordo com Enrst (1991), Escher conseguia criar dois ou mais mundos em um único lugar, objetos e construções impossíveis de haver no mundo real. Ao ver atentamente as obras a seguir, constatamos a impossibilidade de esses objetos existirem.

Figura 16- "Belveder" – 1958 [11]

Figura 17 - "Cubo Impossível" – 1958[12]

Figura 18 - "Escada Acima e Escada Abaixo" – 1960[13]

Figura 19 - "Queda d'água" - 1961[14]

As construções esboçadas por Escher exploram os conceitos opostos tais como atrás e na frente (Figura 16 e Figura 17) ou subir e descer (Figura 18 e Figura 19). O que as tornam intrigantes é o fato de o artista 'retorcer' a realidade e mostrar duas situações contraditórias em uma única cena. Novamente, as dimensões de segunda e terceira ordem estão presentes.

[11] Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/belvedere/. Acesso em 15 nov.2016.
[12] Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/belvedere/. Acesso em 15 nov.2016.
[13] Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/ascending-and-descending/. Acesso em 15 nov.2016.
[14] Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/waterfall/. Acesso em 15 nov.2016.

Como Escher utilizou muito dos conceitos matemáticos, especialmente geométricos, para a construção de suas obras, é comum encontrarmos sugestões de atividades aplicáveis em sala de aula para compreender melhor esses conceitos e desenvolver habilidades geométricas e a percepção das formas e planos com a análise das obras do artista gráfico (BARTH, 2006). A esse respeito, dedicamos a próxima seção.

Explorando as obras de Escher em sala de aula

As obras de Escher servem como alternativas para ensinar conteúdos da Matemática, geralmente, do campo da geometria. Mais do que um recurso atrativo, são capazes de despertar a curiosidade do observador e levá-lo a questionar o que está vendo. Sendo assim, podemos trabalhar com essas obras de modo que interesse aos alunos e os induza a encontrar justificativas sobre o porquê aquela realidade representada lhe causa estranheza.

Neste artigo, as atividades que apresentamos são algumas das diversas atividades disponíveis na internet que exploram as obras de Escher para ensinar Geometria[15]. Além dessas, existem livros, como a da coleção "Vivendo Matemática: Geometria dos Mosaicos", de Luiz Márcio Imenes, que utilizam as obras do artista gráfico para exemplificar aplicações de conceitos geométricos.

Nessa perspectiva, Cifuentes (1993) enfatiza que a capacidade de "ver", ainda que seja algo natural, pode ser desenvolvida, mas requer uma "alfabetização visual", um processo em que a linguagem visual torna possível a conceitualização visual. Além disso, Cifuentes (1993) acredita que, no ensino da Matemática, as concepções formais aliadas à sensibilidade são imprescindíveis para esse processo. Por isso, acreditamos que o aluno precisa aprender a reconhecer figuras geométricas e prontamente saber quais são as propriedades envolvidas na representação feita.

Como Escher utilizou diversos conceitos matemáticos para compor suas obras, professores do mundo inteiro, especificamente das áreas de Artes e Matemática,

[15] Os critérios utilizados para a escolha dos trabalhos foram conforme a acessibilidade aos trabalhos, a complementação entre os conteúdos abordados pelas atividades apresentadas e a utilização das obras de Escher como auxiliadoras na aplicação e compreensão de conceitos geométricos.

trabalham suas construções para ensinar geometria aos seus alunos. Sendo assim, vamos verificar algumas das atividades propostas por alguns desses professores.

A professora de matemática, Eguimara Selma Branco[16], formada em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná/UFPR, propôs uma atividade que se encontra disponível no portal do MEC (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463). O objetivo da atividade é identificar os motivos das obras (os padrões) e quais são os conceitos envolvidos na construção. Primeiramente, o professor pode solicitar que seus alunos façam uma pesquisa sobre Escher e suas obras, de acordo com o roteiro sugerido pela professora Eguimara. Após a pesquisa, os alunos visualizarão algumas das gravuras e tentarão identificar as figuras padrões. Finalmente, os conceitos envolvidos serão expostos e explicados, dando chance aos próprios alunos de "refazerem" as gravuras.

A proposta para esta primeira atividade é que ela seja aplicada para os alunos do Ensino Médio, durante a apresentação do conteúdo de Geometria, e requer conhecimentos prévios sobre sólidos geométricos e planificação, além de análise de obras de artes.

A atividade proposta pela professora foi dividida em 4 partes: A primeira sugere que os alunos pesquisem sobre a vida e as obras de Escher, focando nos conceitos geométricos utilizados pelo artista. A segunda parte solicita ao professor que exponha algumas obras do artista (pode ser por apresentação de *slides* ou cartazes) e peça aos alunos para identificarem os conceitos estudados nas obras vistas. A terceira etapa requer que os alunos façam uma releitura das obras de Escher. Por último, com a planificação de sólidos de Platão, é solicitado aos alunos que montem os sólidos a partir dessas planificações, tendo como estampas algumas gravuras de Escher. Todas as partes feitas pelos alunos devem ser realizadas em grupos de três a quatro alunos.

[16] Mestre em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), Professora PDE (Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do PR - PDE/2009-2011), Especialista em Tecnologia na Educação (UTFPR) e em Fundamentos da Educação (UNICENTRO), Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO). Professora titular de Matemática da Secretaria do Estado da Educação do Paraná (SEED) e Coordenadora da equipe de Tecnologias Educacionais (SEED/PR). Tem experiência nas áreas de Educação Matemática, Tecnologia na Educação e Formação de Professores com/para o uso de recursos tecnológicos digitais.

Vejamos como o professor pode apresentar as obras de Escher na segunda parte da atividade, de acordo com Eguimara, para que os alunos identifiquem os conceitos de simetria, translação e rotação, respectivamente:

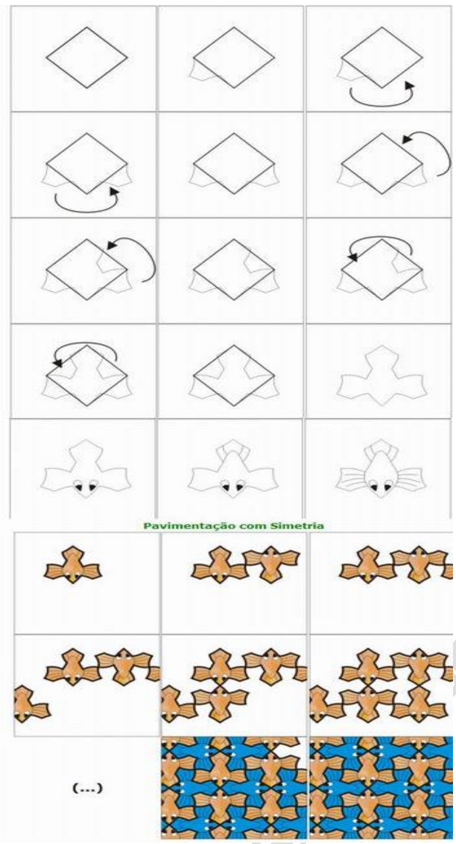

Figura 20 - “Pavimentação com Simetria”[17]

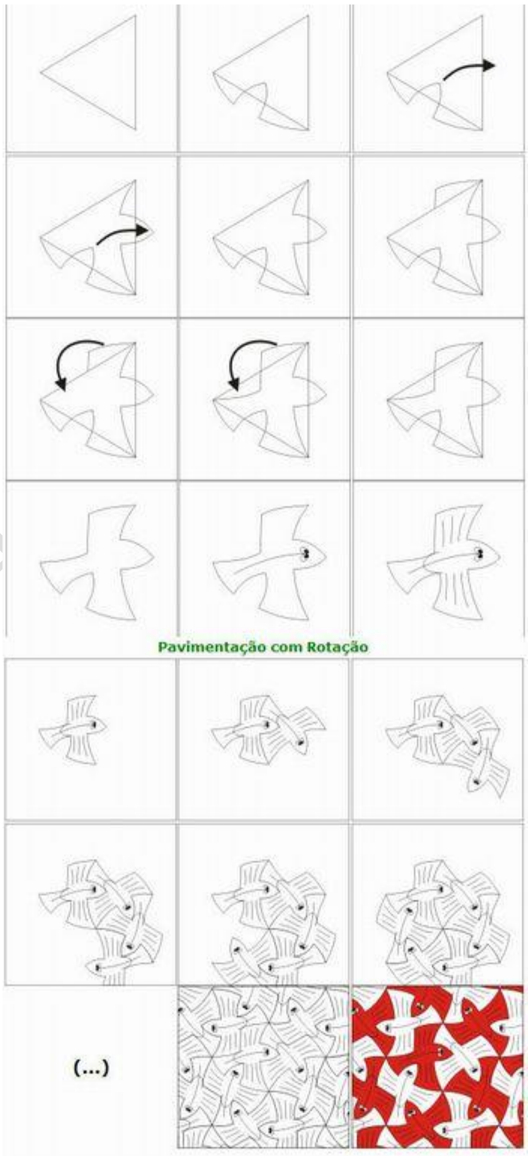

Figura 21 - “Pavimentação com Translação”[18]

[17] **Fonte:** http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463. Acesso em 15/11/2016.
[18] **Fonte:** http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463. Acesso em 15/11/2016.

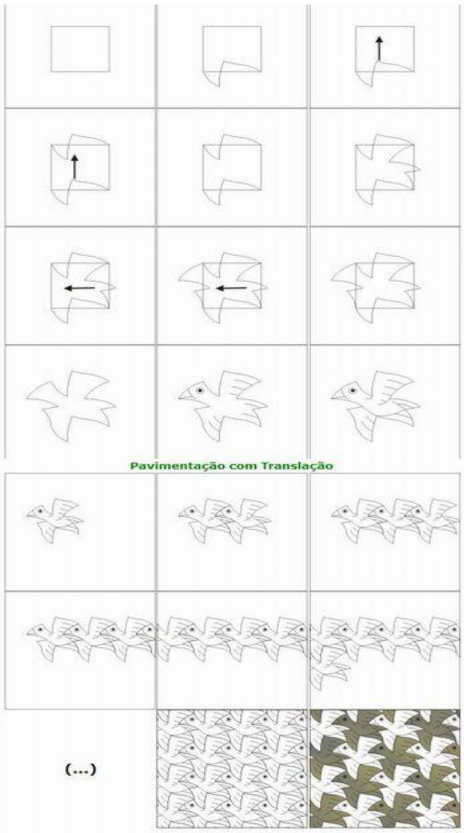

Figura 22 - "Pavimentação com Rotação"
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463

Outro exemplo é o da professora Claudia Maria Fiuza[19], em sua dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática, em que trabalhou os vários conceitos matemáticos envolvidos nas obras de Escher, entre os quais a relação das tecelagens (combinações entre as figuras) com os poliedros de Platão. Nisso, ela propôs a construção desses sólidos regulares utilizando algumas das gravuras de Escher.

Para a execução da atividade, o professor pode dividir a sala em grupos e trabalhar com as definições dos poliedros de Platão, além de mostrar a perfeita união das figuras feitas por Escher. Obviamente, existe uma teoria que permite a execução e o encaixe perfeito das figuras, pois cada motivo das gravuras utilizadas está relacionado com o tipo de poliedro (referente à quantidade de faces que o sólido tem).

Seguem os exemplos:

[19] **Claudia Maria Fiuza Alves** apresentou sua dissertação à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática, no Rio de Janeiro, em 2014.

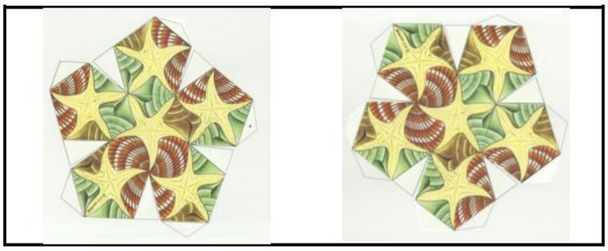

Figura 23 - “Planificação do Dodecaedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.49

Figura 24 - “Dodecaedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.49

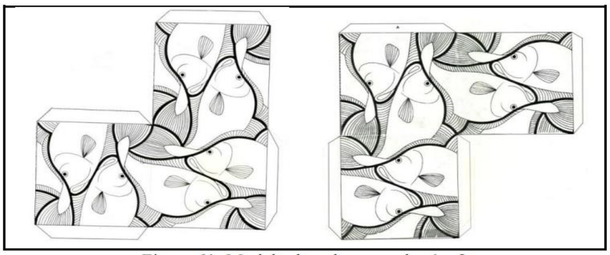

Figura 25 - “Planificação do Cubo”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.50

Figura 26 - “Cubo”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p. 50

Figura 27 - “ Planificação do Tetraedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.51

Figura 28 - “Tetraedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.51

Figura 29 - “ Planificação do Octaedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.52

Figura 30 - “Octaedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.52

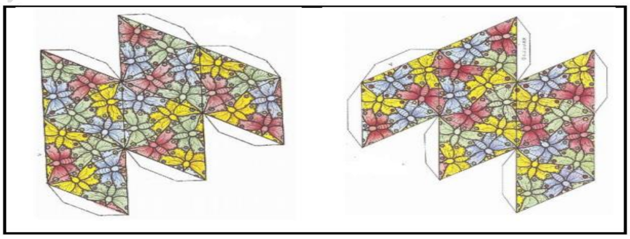

Figura 31 - “Planificação do Icosaedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.53

Figura 32 - “Icosaedro”
Fonte: Claudia Fiuza, 2014, p.53

No caso da atividade proposta pela professora Cláudia, que, a nosso ver, serve como complemento à atividade anterior, já que detalha a construção dos sólidos de Platão, ainda que essa pode não ter sido a intenção da autora, visto que o objetivo principal é fazer com que os alunos percebam os conceitos geométricos envolvidos nas obras estampadas nos sólidos.

Para a realização dessa atividade, conforme a professora, os alunos precisam trabalhar em grupos de até 4 integrantes, montar os sólidos e descrever os conceitos observados. As respostas esperadas devem estar relacionadas com a existência de simetrias, translações e rotações das figuras ao redor do sólido montado.

Explicitados os dois exemplos das professoras, reiteramos que tais atividades são algumas das diversas que existem disponíveis na internet ou mesmo dentro das instituições de ensino, ou seja, intentamos aqui, mostrar que se trata de sugestões e ferramentas para auxiliar o ensino de alguns conceitos geométricos de maneira que as aulas sejam mais dinâmicas e atrativas. Nesse sentido, observamos que, ao aplicar essas atividades, as professoras relataram um bom desempenho dos alunos para realizá-las, o que já é gratificante do ponto de vista de um educador.

Por fim, registramos que a preocupação com o modo de ensinar e o quanto os alunos aprendem nos leva a criar intervenções como as mostradas aqui. É importante que o olhar do educador se volte para essas criações e, se possível, que sejam feitas juntamente com os educandos. A interdisciplinaridade também pode ser trabalhada e é uma forma eficaz de unir conteúdos específicos de outras áreas do conhecimento em uma só atividade. Isso permite, como temos defendido nesta pesquisa, um melhor aproveitamento do processo de ensino-aprendizagem.

Conclusão

Para finalizarmos este artigo a partir da pesquisa realizada sobre a importância de Escher para a educação matemática, salientamos que a busca por tornar as aulas de matemática mais atraentes e interessantes nos leva a refletir sobre como podemos alcançar esse objetivo sem abandonar os conceitos que precisam ser ensinados.

Nesse aspecto, tendo em vista a diversidade de atividades que existem, graças aos esforços de milhares de educadores de todo o mundo, podemos tomar como inspiração todas essas intervenções que visam à melhoria no ensino de matemática assim como de outras áreas, pois a interdisciplinaridade pode ser trabalhada com esse tipo de atividade.

Honestamente, acreditamos ser importante, na hora de ensinar determinado conteúdo, independente da complexidade deste, que tenhamos a consciência de que existem muitos trabalhos pelo mundo que podem ser utilizados como uma alternativa interessante para ensinar, como as obras de artes, textos, um relato de experiência, uma atividade cultural, entre outros. O que nos resta é procurar por esses trabalhos e tentar utilizá-los em nosso favor.

Ao apresentarmos as atividades das professoras Eguimara e Cláudia, buscamos por trabalhos que se complementassem e discutissem sobre os principais conceitos geométricos existentes nas obras de Escher. Além disso, pensamos na disponibilidade dessas atividades para que qualquer professor, com acesso à internet, possa utilizá-las em suas aulas, visto que as autoras detalham cada etapa das atividades. Entretanto, alertamos que cabe ao professor avaliar os trabalhos sugeridos e verificar se está de acordo com o currículo a ser seguido e com as normas e demanda da escola onde trabalha, no caso de querer adotar uma metodologia nesse sentido.

Por fim, gostaríamos de atestar que as obras de Escher permitem que sejam estudados vários dos conceitos geométricos. A engenhosidade do desenhista gráfico permitiu que os polos da razão e da emoção se unissem em uma única superfície, isto é, muitos aspectos históricos, sociais e racionais, em nosso entendimento, foram abordados durante a construção das gravuras.

Sem dúvidas, portanto, cremos que o artista soube como trabalhar a Matemática e a Arte de modo que ambas se completem, mesmo que não tenha sido sua intenção inicial. A clareza em representar uma realidade própria, propositalmente enigmática, com certeza levou Escher ao mais alto nível, até então, de representação do mundo, com de objetos reais e situações comuns, mas impossível de existir. O "mundo mágico de Escher" ainda tem muito a ser explorado e podemos encontrar o melhor caminho para desvendar esse mundo complexo e repleto de paradoxos.

Referências bibliográficas

ACEVEDO, Fernando. Escher y el arte imposible. *Revista Acta.* MF 045, 2007. Disponível em <https://www.acta.es/medios/articulos/biografias_y_personajes/045061.pdf>. Último acesso em 14 abr.2017.

ALVES, Claudia Maria Fiuza. *O Estudo da Simetria Através da Arte de Maurits Cornelis Escher***.** PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Rio de Janeiro/RJ, 2014. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/claudia_fiuza.pdf> Acesso em 15 nov.2016.

APM. *Arte e Matemática.* Lisboa: APM, 1998.

BARTH, Glauce. *Arte e Matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M. C. Escher*. Universidade Federal do Paraná, 2006. Disponível em: < http://www.ppge.ufpr.br/teses/M06_barth.pdf>. Acesso em 22 mar.2017.

BRANCO, Eguimara Selma; MENTA, Eziquiel. *Escher e a Matemática***.** Secretaria de Educação. Curitiba/PR, 2010. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463> Acesso em 15 nov.2016.

CIFUENTES, José Carlos. A Linguagem Visual da Matemática. *Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau, 2003.

Dicionário Online de Português. *Metamorfose.* Disponível em: <https://www.dicio.com.br/metamorfose/> Acesso em 15 nov.2016.

ERNST, Bruno. *The Magic Mirror of M. C. Escher*. England: Tarquin, 1978.

ERNST, Bruno. *O espelho mágico de M. C. Escher*. Benedikt Taschen Verlag GmbH, Hohenzollernring 53, D-50672 Köln, 1991.

ESCHER, Maurits Cornelis. *Gravuras e Desenhos*. Hamburgo: Taschen (Trad. Maria Odete Conçalves - Koller), 1994.

M.C. Escher Foundation. *M.C. Escher.* Site oficial. Disponível em: <http://www.mcescher.com/> Acesso em 15 nov.2016.

SEMINÁRIO (2001/2002). *Da Matemática à Reflexão Sobre Matemática***.** Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa, Portugal. Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/escher/index.html> Acesso 15 nov.2016.

Bibliografia consultada

BARBOUR, Ana Maria. *A arquitetura árabe no apogeu do Islã***.** Entrevista publicada em 17/06/2010. Disponível em: < http://www.icarabe.org/entrevistas/a-arquitetura-arabe-no-apogeu-do-isla>. Último acesso em 23 de mar. de 2017.

MATHÉMATIQUES ACADÉMIE DE ROUEN. *Thème D'Étude*: Pajaritas. Disponível em: <http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article674> Acesso em 15 de nov. de 2016.

MEHAN, Lees. *Interior do palácio de Alhambra***.** Disponível em: < https://www.redbubble.com/people/lesm/works/2538578-plaza-de-leones-alhambra-palace-granada-spain>. Último acesso em 23 de mar. de 2017.

VEDHUYSEN, W. F. *The magic of M. C. Escher*. London: Thames & Hudson, 2006.

ESCHER AND THE TEACHING OF GEOMETRY

ABSTRACT
This paper briefly describes the life and works of Escher, a dutch graphic artist known for his impossible constructions and a paradoxical vision that unites Mathematics and Art. The focus of the various phases of the artist's career will be the Metamorphosis phase, since it is the one that works the most with the various geometric concepts. Based on official site sources that deal with the subject addressed, the main objective of this study is the presentation of activities that can be carried out in the classroom to teach some geometric concepts, such as symmetries and Plato's polyhedrons. In addition, it is also intended to reflect on teaching practices that can explore other areas of knowledge. Finally, we present a reflexive analysis about the study.
Keywords*: Escher. Geometric Concepts. Metamorphosis.*

Envio: março/2017
Aceito para publicação: abril/2017