O NÚMERO ÁUREO E O NÚMERO PLÁSTICO [1]

Miguel Shiniti AGUENA[2]
Estudante de Ensino Técnico Integrado ao Médio
IFSP/Câmpus São Paulo

Arthur Pires JULIÃO[3]
Mestre em Matemática/USP
Docente de Matemática
FATEC/Câmpus São Paulo

Patrícia Andrea PALADINO[4]
Doutora em Ciências/USP
Docente de Matemática
IFSP/Câmpus São Paulo

RESUMO
Este trabalho integra um projeto de pesquisa de iniciação científica, mais amplo, que relaciona Matemática e Arquitetura numa estratégia de ensino. O número áureo é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega φ (PHI), em homenagem ao escultor Phideas, que a teria utilizado para projetar o Parthenon; o número plástico ou o número de prata, ρ (RHO), de natureza semelhante, mas pouco conhecido, foi descoberto em 1928, pelo monge e arquiteto holandês Hans van der Laan. O objetivo deste trabalho é decidir o caráter racional ou irracional dessas constantes matemáticas interessantes por meio do uso de resultados elementares da álgebra do anel de polinômios R[x] (e de alguns de seus subanéis) utilizando o lema de Gauss, conteúdo dos livros de Matemática do Ensino Médio.
Palavras-chave: Constante Matemática; Equação Polinomial; Número Irracional.

Introdução

No estudo da Matemática, nem sempre se considera sua relação com outras áreas, contudo, neste trabalho, foi desenvolvido um tema matemático relevante e de

[1] Trabalho resultante de Iniciação Científica. Orientadora Profa. Dra. Patrícia Andrea Paladino. Co-orientador Prof. Me. Arthur Pires Julião.
[2] Endereço eletrônico: Miguel.aguena737@gmail.com
[3] Endereço eletrônico: pjarthur@fatecsp.br
[4] Endereço eletrônico: patrícia.paladino@yahoo.com

interesse nas artes. Duas constantes matemáticas importantes encontram uso em problemas especiais de proporção e estética na arquitetura, a saber, os números áureo e plástico.

O número áureo ou número de ouro, usualmente denotado por φ, letra grega PHI, em homenagem ao escultor grego Phideas, define uma proporção utilizada na construção do Parthenon, templo construído no século V a.C. na Grécia Antiga (HUNTLEY, 1970).

O número plástico ou número de Padovan, geralmente denotado por ρ, letra grega RHO, descreve uma outra proporção de descoberta mais recente, no século XX, feita pelo monge e arquiteto holandês Hans Van Der Laan (ARAÚJO, 2008).

Tais constantes matemáticas são números algébricos irracionais que admitem diversas apresentações.

O objetivo deste trabalho é empregar uma estratégia de ensino não convencional: vincular a matemática com a arquitetura e as artes.

Materiais e métodos

Este trabalho, realizado por um estudante do primeiro ano do curso técnico integrado ao Ensino Médio, faz parte de um projeto de pesquisa mais amplo envolvendo colaboração com outra estudante, também de iniciação científica, do curso de bacharelado em Arquitetura e Urbanismo. O autor deste trabalho foi orientado a estabelecer, com rigor matemático, ou seja, demonstrar, que ambas constantes, que determinam proporções na arquitetura, são, realmente, números reais algébricos irracionais.

A metodologia utilizada para alcançar tal demonstração demandou o estudo de polinômios de coeficientes reais, racionais ou inteiros, e o estudo do lema de Gauss, conteúdos disponíveis em livros de Matemática do Ensino Médio. Para a realização dos gráficos foi utilizado o *software Geogebra*.

Resultados e discussão

A proporção áurea, também chamada de razão áurea ou divina proporção, é o resultado da divisão de um segmento qualquer em duas partes, de modo que a razão entre o comprimento total do segmento e a parte maior seja igual à razão entre esta parte e a parte menor. O valor numérico deste quociente é conhecido como Número de Ouro (QUEIROZ, 2007).

Este valor foi utilizado na Grécia para estabelecer as proporções dos templos, tanto em suas plantas como em suas fachadas.

Além do segmento áureo, existem outros elementos geométricos que apresentam a proporção áurea. Em figuras geométricas, a razão áurea aparece no triângulo áureo, no retângulo áureo, no pentagrama e em algumas espirais.

O número de ouro (φ) é a raiz real positiva da equação de segundo grau:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Este fato pode ser comprovado observando-se o gráfico da função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que mapeia o número real x nos valores reais $f(x) = x^2 - x - 1$ conforme ilustrado na Figura 1.

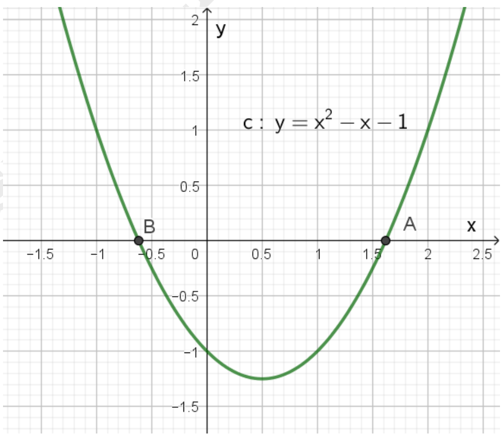

Figura 1: Gráfico da função polinomial usada na definição do número de ouro
Fonte: Autores

Pode-se observar que o gráfico intercepta o eixo das abscissas, eixo x, no ponto A e no ponto B. A abscissa do ponto A é a raiz real positiva φ, a saber φ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e a abscissa do ponto B corresponde ao inverso multiplicativo de φ.

O número de ouro apresenta propriedades que também são encontradas em um outro número, chamado de número plástico e descoberto em 1928 pelo arquiteto e monge beneditino Hans van der Laan (1904-1991). Este número ainda é pouco divulgado, mas tem alguma importância para a matemática (STEWART, 2004).

O número plástico (ρ) é a única raiz real da equação cúbica:

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

fato também comprovável via observação do gráfico da função polinomial, g:ℝ→ℝ, que mapeia o número real x nos valores reais $g(x) = x^3 - x - 1$, conforme ilustrado na Figura 2:

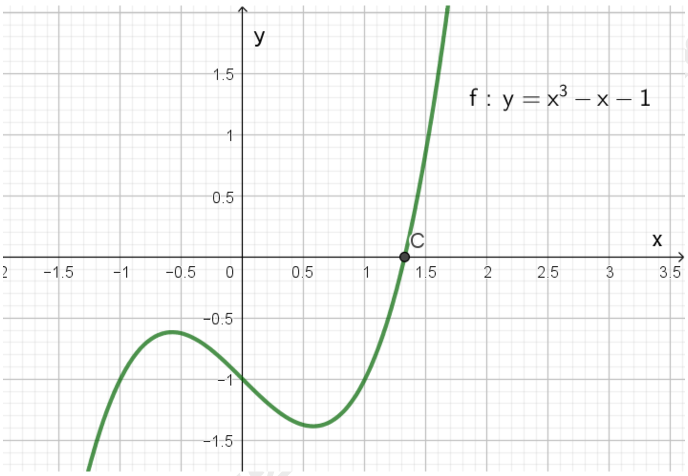

Figura 2: Gráfico da função polinomial usada na definição do número plástico
Fonte: Autores

O Conjunto dos Números Racionais, $\mathbb{Q}$, tem como elementos números que podem ser representados por frações, com numeradores inteiros e denominadores inteiros não nulos, e, por isso, contendo o Conjunto dos Números Inteiros Relativos, $\mathbb{Z}$, com $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais (DANTE, 2005).

O Conjunto dos Números Irracionais, $\mathbb{I}(= \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, é o complementar em $\mathbb{R}$ do conjunto dos números racionais. Diferentemente dos números racionais que, em sua forma decimal, podem ser representados por expansões finitas, ou infinitas e periódicas, números irracionais são representados por expansões decimais infinitas e não periódicas, por não ser possível escrevê-los em uma forma fracionária com numeradores inteiros e denominadores inteiros não nulos. Assim, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

O Conjunto dos Números Complexos, $\mathbb{C}$, tem como elementos todos os números reais, bem como os chamados números complexos não reais (IEZZI, 2007).

O CPRR (Critério de Pesquisa de Raízes Racionais), um versátil lema devido a Gauss, é um teorema que propõe um algoritmo para encontrar as possíveis raízes racionais de equações polinomiais do tipo $p(x) = 0$, em que $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros na indeterminada x), é não constante. Com tal notação, então, do enunciado formal abaixo, já se percebe como procurar todos os "candidatos racionais" ao anulamento de $p(x)$:

se um número racional a/b com a e b primos entre si, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, é raiz de uma tal equação polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, então, a é divisor de a_0 e b é divisor de a_n.

Sendo nulo o coeficiente racional a_0, $x = 0$ é evidentemente uma raiz racional de $p(x)$, de modo que pode-se simplificar ainda mais a equação, bastando cancelar x^r, em que $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, é a multiplicidade algébrica da raiz $x = 0$.

Se $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, o conjunto dos polinômios de coeficientes racionais na indeterminada x, e é não constante, a mesma equação acima poderá ter suas eventuais raízes racionais investigadas pelo CPRR, bastando para isso multiplicá-la pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores dos coeficientes racionais nela presentes (IEZZI, 2007).

Seja então a equação em que o número de ouro é raiz, $x^2 - x - 1 = 0$. Pelo teorema acima (o CPRR), as possíveis raízes racionais para essa equação pertencem ao conjunto $\{-1, 1\}$. Daí, testando-se 1: $1^2 - 1 - 1 = -1 \neq 0$, e testando-se -1: $(-1)^2 + 1 - 1 = 1 \neq 0$.

Logo, conclui-se que não existem raízes racionais para essa equação. Portanto, tais raízes são reais irracionais ou complexas não reais.

Para o polinômio associado ao número áureo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$, logo, conclui-se também que não existem raízes complexas não reais para essa equação: assim, $\varphi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

O mesmo teorema usado para o polinômio associado ao número plástico, $x^3 - x - 1 = 0$, produz um resultado semelhante ao que ocorreu com o polinômio associado ao número áureo. As possíveis raízes racionais para essa equação pertencem ao conjunto $\{-1, 1\}$; testando-se 1: $1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$; testando-se -1: $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$. Logo, $\rho \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Já foi observado, no gráfico (b) na Figura 1, que ρ é a única raiz real da equação cúbica que o define. As outras duas raízes são então um número complexo não real e seu complexo conjugado.

Conclusões

A partir do conteúdo e conceitos acessíveis aos estudantes de Ensino Médio, provou-se que, por serem raízes de polinômios de coeficientes racionais não identicamente nulos, o número de ouro e o número plástico são números reais algébricos e, como obtido via o CPRR, irracionais.

Observa-se que muitas vezes a matemática tem sido ensinada sem contextualização, desta forma, este trabalho exemplificou que é possível aprender e contextualizar alguma matemática por meio do estudo da proporção existente nas obras de artes. Além disso, a matemática faz-se presente na arte, como se pôde observar a partir da arquitetura desenvolvida pelos gregos e mais recentemente pelo monge e arquiteto holandês, Hans Van Der Laan.

Referências

ARAÚJO, Ana Campos. La obra de Van der Laan y El número de plástico. Universidad Politécnica de Madrid, Madri, 2008. Disponível em: http://www.ajmao.org/WebEditor/Pagines/La%20obra%20de%20van%20der%20laan.pdf. Acesso em: 03 jul. 2018

DANTE, L. R. **Matemática**. Volume Único. Editora Ática, São Paulo, 2005.

HUNTLEY, H.E. **The Divine Proportion**. Dover Publications, 1970.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios, Equações. São Paulo: Editora Atual, 2007.

QUEIROZ, Rosania Maria. Razão Áurea, Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf. Acesso em: 30 jun. 2018.

STEWART, I. **Mania de Matemática**: Diversão e jogos de lógica. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2004.

THE GOLD RATIO AND THE PLASTIC NUMBER

ABSTRACT

A certain lemma (due to Gauss) is used to disclose the rational of irrational nature of some important mathematical constants: the golden number and the plastic number. The golden number is denoted by the Greek letter φ (PHI), in honor of the sculptor Phideas, who would have used it to design the Parthenon; the plastic number (or the silver number) is denoted by the Greek letter ρ (RHO), was discovered in 1928 by the Dutch monk and architect Hans van der Laan. Both are real algebraic irrational constants.

Keywords: *mathematical constant, irrational number, polynomial equation.*

Envio: novembro/2018
Aceito para publicação: fevereiro/2019