CRISTALOGRAFIA E APLICAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL[1]

Dayene Ferreira dos SANTOS[2]
Licenciada em Matemática
IFSP/Câmpus São Paulo

Thaynara Keiko Oda SANTOS[3]
Licenciada em Matemática
IFSP/Câmpus São Paulo

Gabriela Cotrim de MORAES[4]
Mestra em Matemática/UFABC
Docente de Matemática
IFSP/Câmpus São Paulo

RESUMO
Este artigo é resultado de um estudo feito nas aulas de Interface da Química com Matemática – IQMM7, ministrada para o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Tendo em vista as várias aplicações da Cristalografia no cotidiano e sua relação com conceitos geométricos, tratamos de apresentar as formas geométricas das moléculas de cristais e relacionar com o ensino da Geometria Espacial. Nosso foco é mostrar a Cristalografia como tema interdisciplinar para aulas de Matemática e Química no Ensino Médio, a fim de que os estudantes compreendam sobre a relevância dessa área de estudo para o mundo e como essas disciplinas podem estar relacionadas. São diversas as abordagens possíveis do assunto em sala de aula, por isso sugerimos algumas atividades a serem aplicadas por meio de uma Sequência Didática. Baseamo-nos em informativos da UNESCO (2014) que trataram sobre o ano da Cristalografia, em 2014, e da sua importância para o mundo, além dos estudos sobre formas geométricas de Silva (2011) e da teoria das Sequências Didáticas por Zabala (1998).
Palavras-chave: Cristalografia; Interdisciplinaridade; Conceitos Geométricos.

Introdução

A Cristalografia é uma Ciência Matemática que estuda os cristais e suas propriedades. Considerada recente, a Cristalografia desperta a curiosidade de estudiosos das áreas de exatas, especialmente por conta das organizações atômicas dos cristais.

---
[1] Trabalho resultante do componente curricular Interface da Química com Matemática. Orientadora Profa. Ma. Gabriela Cotrim de Moraes.
[2] Endereço eletrônico: dayene.f.santos.job.esc@gmail.com
[3] Endereço eletrônico: tkos.94@gmail.com
[4] Endereço eletrônico: gcotrim@gmail.com

Dentre os diversos conceitos matemáticos que podemos observar no estudo dos cristais, destacamos os geométricos. De acordo com UNESCO (2014), alguns átomos de um cristal possuem formatos de sólidos regulares podendo apresentar bases triangulares, quadradas, retangulares ou hexagonais.

O estudo dos cristais tem se desenvolvido principalmente por conta do avanço tecnológico. Cartões de memória, telas planas de televisão, componentes de carros e aviões são exemplos de produtos que utilizam algum tipo de cristal em sua composição. Esses produtos usufruem das propriedades dos cristais para elevar sua eficácia e, muitas vezes, sua durabilidade. UNESCO (2014) aponta que, embora muitos dos cristais conhecidos por nós sejam sólidos, existem cristais líquidos e estes são muito explorados para a fabricação das telas de aparelhos eletrônicos.

Outra importante aplicação da Cristalografia está na Medicina. Determinados medicamentos precisam de uma proteína com formato específico para combater certos vírus ou bactérias, e o estudo dos cristais permite observar como ocorrem algumas ligações atômicas e moleculares, auxiliando no processo de fabricação da proteína. Como enfatiza UNESCO (2014), a observação das ligações atômicas e moleculares que formam um cristal pode ser feita por meio da radiação de raios-X.

Cristalógrafos do mundo inteiro se reuniram em uma conferência no ano de 1946, em Londres, e fundaram a *International Union of Cristallography* – IUCr (União Internacional de Cristalografia), que foi aceita pelo *International Council for Science* – ICSU (Conselho Internacional de Ciência) no ano seguinte. Desde então, a IUCr tem realizado muitos estudos e publicado diversos artigos e trabalhos científicos sobre Cristalografia. Os cristalógrafos têm colaborado, principalmente, com o avanço das Tecnologias e da Medicina.

Inicialmente, descreveremos um breve histórico da Cristalografia e então apresentaremos algumas de suas aplicações. Em seguida, trataremos da geometria espacial dos cristais e como os formatos conferem certas propriedades aos mesmos. Finalmente, apresentaremos algumas sugestões de trabalhos e atividades que podem ser desenvolvidos em sala de aula para estudantes do Ensino Médio (a versão para os alunos encontra-se anexa).

Breve histórico da Cristalografia

A beleza dos cristais tem fascinado o ser humano há muitos anos e essa curiosidade levou a descobertas importantes, entre elas, como se dá o processo de cristalização do sal e do açúcar. Conhecendo esse processo, o homem pode utilizá-lo de diversas maneiras, como conservar mais alimentos e alterar seus sabores. De acordo com publicação da UNESCO (2014), o processo de cristalização do açúcar, surgiu na Índia a partir do caldo da cana de açúcar e o sal teria sido, inicialmente, extraído das águas salgadas na China. No Iraque, o mesmo processo de cristalização do sal aconteceu no século VIII d.C.

Somente no século XVII, "em 1611, o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler[5] observou as formas simétricas dos flocos de neve e deduziu sua estrutura subjacente" (UNESCO, 2014). Os cristais de água dependem de determinadas condições climáticas para formar os flocos de neve. "Formalmente, devemos considerar o começo da Cristalografia com Stenon (1638-1686) em 1669, quando observou e estabeleceu a 1ª Lei da Cristalografia" (HISTORIA DE LA CRISTALOGRAFIA, 2013). A Lei enuncia sobre a constância dos ângulos entre faces equivalentes de cristais da mesma espécie. Após a invenção do microscópio, em 1560, Christian Huygens (1629-1695) realizou estudos das propriedades ópticas dos cristais. Em 1780, Arnould Carengeot (1742-1806) junto a Nicolas Vinçard (1741-1788) construíram um instrumento para medir ângulos, chamado goniômetro. Esse aparelho ajudou a mensurar ângulos das faces dos cristais mais rapidamente.

O mineralogista francês René Just Haüy[6], após observar a fragmentação de um pedaço de calcita[7] por volta do ano 1800, começou a estudar as formas dos cristais e desenvolveu as leis geométricas da cristalização. Nessa época, Haüy descreveu a 2ª lei

---

[5] Johannes Kepler (1571-1630) foi matemático, físico e astrônomo. Destacou-se em particular nesta última carreira, pois seu trabalho marca o início da Astronomia Moderna. Kepler tentou associar as órbitas planetárias aos cinco sólidos perfeitos de **Platão**, figuras tridimensionais cujas faces são polígonos regulares idênticos, mas jamais conseguiu encaixar as órbitas dos planetas nos sólidos de modo harmônico. Anos mais tarde, desenvolveu as chamadas Três Leis de Kepler, que descrevem o movimento das órbitas dos planetas em torno do Sol, afirmando que essas órbitas eram elípticas (VELOSO, 2004).

[6] René Just Haüy (1743-1822) era um mineralogista e botânico francês. Em 1801, ele publicou seu Tratado de Mineralogia, soma de todo o conhecimento de cristalografia e mineralogia da época. (ROSS, 2014).

[7]Calcita ou calcite é um mineral à base de carbonato de cálcio. O emprego mais importante da calcita é na fabricação de cimentos e cal para argamassa. Também é usado como corretor de pH em solos ácidos (MACHADO, 2018).

da Cristalografia, a lei da racionalidade dos parâmetros, que diz que os cristais são formados por pequenos paralelepípedos constituindo as suas faces.

Thomas Bartolin (1616-1680) descobriu, antes mesmo de Haüy, que os cristais têm eixos de simetrias que variam entre as ordens 1, 2, 3, 4 e 6. Além disso, percebeu que existem até sete sistemas de simetria que definem os cristais.

A partir do século XIX muitas descobertas e invenções ampliaram a teoria da Cristalografia. No ano de 1809, William H. Wollaston (1776-1828) transformou o antigo goniômetro em um aparelho mais sofisticado, permitindo medir ângulos em cristais muito pequenos. Esse novo aparelho permitiu o avanço nos estudos das propriedades dos cristais e, em homenagem a Wollaston, foi nomeado um tipo de cristal de cálcio: a Wallastonita.

Conforme Historia de la Cristalografia (2013, p.1), Johann F. C. Hessel (1796-1872) estudava analiticamente as propriedades da simetria quando descobriu e formulou a lei de zonas e das 32 classes de simetria, classificadas em sete sistemas cristalinos. Enquanto isso, Etienne-Louis Malus (1775-1812) e David Brewster (1781-1868) se dedicaram aos estudos ópticos dos cristais e, alguns anos mais tarde, Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) e James Clerk Maxwell (1831-1879) publicaram seus estudos sobre eletromagnetismo e ondas com base nas observações dos cristais. Eilhard Mitscherlich (1794-1863) deu continuidade aos estudos de Haüy e desenvolveu os conceitos de isomorfismo e polimorfismo dos cristais, atraindo a atenção de diversos químicos por se tratar de um conceito a ser explorado não apenas nos cristais encontrados na natureza, mas também nos cristais sintéticos.

Auguste Bravais (1811-1863) conseguiu demonstrar que existem apenas 14 formas distintas de distribuição de redes de pontos no espaço tridimensional (malha espacial), desenvolvendo a sua teoria reticular dos cristais. Foi também Bravais quem descobriu as 32 classes de simetria, estudadas por Hessel. Evgraf S. Fedorov (1853-1919), Arthur Moritz (1853-1928) e William Barlow (1845-1934) deduziram os 230 grupos espaciais quando incorporaram as simetrias de eixos helicoidais e os planos de deslizamento aos seus estudos.

Em 1912, com a descoberta de Max Von Laue (1879-1960) sobre a difração de raios-X dos cristais, a Cristalografia se fortalece como ciência. Sir William Henry Bragg (1862-1942) e seu filho Sir William Lawrence Bragg (1890-1971) observaram e catalogaram diversas estruturas cristalinas de um grande número de fases mineralógicas simples. Este foi um avanço na Cristalografia Estrutural. As descobertas dos Bragg foram importantes para compreender a estrutura de cristais naturais e sintéticos.

De acordo com Historia de la Cristalografia (2013, p.2), conforme as pesquisas sobre cristais avançavam, os estudiosos começaram a distinguir os cristais ideais dos reais. Os ideais seriam aqueles que apresentam estruturas cristalinas regulares e sem imperfeições, enquanto os reais apresentam algumas irregularidades. O conceito de imperfeição foi introduzido por Yakov Il'ich Frenkel (1894-1952) em 1926, acompanhado por Carl Wilhelm Wagner (1901-1977) e Walter Hermann Schottky (1886-1976) no ano de 1930.

De acordo com UNESCO (2014), a Cristalografia se formalizou como ciência no início do século XIX. Conforme os estudos foram realizados, a ciência se associou à Química e, mais recentemente, à Física. Atualmente, o estudo dos cristais tem proporcionado um progresso científico significativo, pois com as análises acerca das estruturas cristalinas é possível criar materiais sintéticos que satisfaçam as necessidades humanas, como a composição de medicamentos. O estudo dos cristais tem, ainda, colaborado fortemente para o avanço da Tecnologia e de outras ciências, como a Mineralogia, precursora da própria Cristalografia.

Geometria dos cristais

Branco (2014a) descreve em seu dicionário que os minerais[8] apresentam uma estrutura cristalina, sendo que poucos são amorfos, isto é, não apresentam essa estrutura ordenada, totalizando apenas 0,3% das espécies conhecidas. Para compreender melhor o que se considera como uma "estrutura", vejamos a definição dada por Callister:

> a estrutura de um material usualmente relaciona-se ao arranjo de seus componentes internos. Estrutura subatômica envolve elétrons dentro dos átomos individuais e interações com o seu núcleo. Num nível

[8] Os geólogos definem um mineral como uma substância de massa inorgânica natural, geralmente sólida e cristalina, de composição química definida, com um ou vários tipos de cristalização (NUNES; NOBREGA JR., 2009, p. 06).

> atômico, estrutura abrange a organização dos átomos ou moléculas entre si (CALLISTER, 1991, p.1).

Os cristais são classificados de acordo com as características geométricas das suas estruturas atômicas em sete sistemas cristalinos em que cada um é "o conjunto de cristais cujos eixos cristalográficos são iguais nas suas dimensões relativas, apresentando relações angulares gerais constantes" (BRANCO, 2014b, p.1). Já o eixo cristalográfico é definido como

> qualquer das linhas imaginárias que atravessam um cristal, encontrando-se em seu centro [...]. Há um eixo frontal ao observador, chamado de **a**; um eixo vertical, chamado de **c**; e um eixo perpendicular a esses dois, chamado de **b**. O ângulo entre **c** e **b** é chamado de **alfa (α)**; o ângulo entre **a** e **c** é chamado de **beta (β)**; e o ângulo entre **a** e **b**, de **gama (γ)** (BRANCO, 2014b, p.1).

Vejamos a Figura 1, que representa um sistema cristalino orientado pelas arestas de uma célula unitária, ou seja, de "um paralelogramo constituído por um número finito de átomos que ocupam um determinado volume" (GONÇALVES, 2006, p. 24).

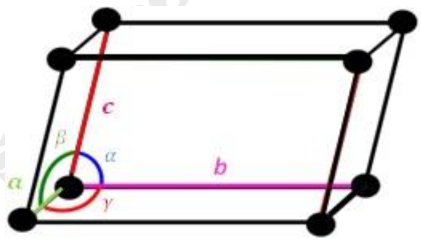


Figura 1: Célula unitária e o sistema cristalino
Fonte: Autoras

Assim, conforme os átomos se arranjam, constrói-se o que chamamos de rede. Rede "significa um arranjo tridimensional de pontos coincidindo com as posições dos átomos (ou centros de esferas)" (CALLISTER, 1991, p.19).

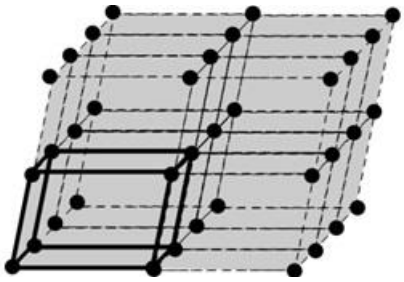
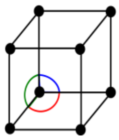
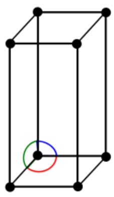
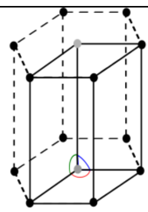


Figura 2: Rede atômica (os pontos representam os átomos)
Fonte: Autoras

Os sete sistemas cristalinos são chamados de cúbico, tetragonal, ortorrômbico, hexagonal, trigonal, monoclínico e triclínico, que são subdivididos em 32 classes cristalinas. Como aponta Gonçalves (2006), as redes são divididas em três grupos de acordo com algumas características ópticas e simétricas, das quais omitimos informações por não ser foco de nossa discussão, mas que podem ser facilmente encontradas em dissertações sobre sistemas cristalinos. Vejamos o quadro (Figura 3) dos sistemas cristalinos a seguir:

	Sistema Cristalino	**Geometria da célula unitária**	**Parâmetros da célula**
Grupo I	**Cúbico**		$\alpha = \beta = \gamma = 90°$ $a = b = c$
Grupo II	**Tetragonal**		$\alpha = \beta = \gamma = 90°$ $a = b \neq c$
	Hexagonal		$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$ $a = b \neq c$

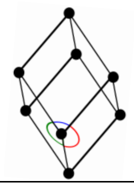
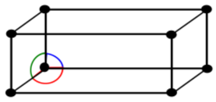
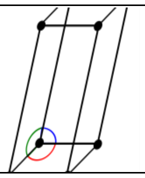
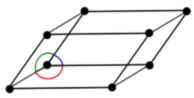
	Trigonal		$\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$ $a = b = c$
Grupo III	**Ortorrômbico**		$\alpha = \beta = \gamma = 90°$ $a \neq b \neq c$
	Monoclínico		$\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$ $a \neq b \neq c$
	Triclínico		$\alpha \neq \beta \neq \gamma$ $a \neq b \neq c$

Figura 3: Classificação dos cristais por sistema cristalino
Fonte: Autoras

A seguir, destacamos as principais características de cada sistema conforme apresenta Branco (2014b).

No **sistema cúbico** os eixos cristalográficos têm mesmos tamanhos e são mutuamente perpendiculares. Apesar do nome, as células unitárias podem ter formatos de cubo, octaedros ou dodecaedros. Como destaca Branco (2014b), os cristais desse sistema possuem a característica da isotropia térmica e óptica, ou seja, a luz e o calor se propagam com a mesma velocidade pelo cristal, independente da direção. Cerca de 7,8% das espécies de minerais conhecidas são desse grupo, entre elas diamante, ouro, prata, pirita e sodalita.

O **sistema tetragonal,** bem como o sistema cúbico, possui eixos mutuamente perpendiculares, mas o eixo *c* tem comprimento diferente do dos demais. As células têm formato de bloco retangular, podendo ser octaedros ou prismas de bases quadradas com pirâmides nas bases. Pertencem ao sistema 6,4% dos minerais conhecidos, tais como zircão, rutilo, idocrásio e cassiterita.

No **sistema ortorrômbico** também ocorre a presença de eixos perpendiculares como os anteriores, mas todos com tamanhos distintos. As células podem ter formatos de blocos retangulares ou octaedros. Abrange cerca de 28,6% dos minerais conhecidos, entre eles topázio, crisoberilo e zoisita.

O **sistema hexagonal** apresenta quatro eixos, sendo três horizontais de mesmo tamanho e com ângulo de 120º entre eles, além do eixo vertical com tamanho diferente e perpendicular aos demais. Pertencem a esse sistema 7% dos cristais conhecidos e são exemplos a apatita, o berilo (esmeraldas) e a covellita.

Já o **sistema trigonal** é semelhante ao anterior, porém se diferencia na simetria, pois o sistema hexagonal tem simetria senária[9] enquanto o trigonal apresenta simetria ternária[10]. As células têm formas de tetraedros; são representantes desse sistema cerca de 10,1% dos cristais catalogados, entre eles o quartzo, o coríndon e as turmalinas.

O **sistema monoclínico** apresenta eixos de tamanhos distintos e dois ângulos retos. As células podem assumir várias formas prismáticas e mais de 30% dos minerais conhecidos possuem esse sistema, entre eles jadeíta, espodumênio, ortoclásio e euclásio.

Por fim, o **sistema triclínico** tem eixos e ângulos diferentes entre si. As células têm formas prismáticas e são mais simples que as anteriores. Compreende 9% dos cristais conhecidos, por exemplo, a turquesa e a rondonita.

Para que o arranjo entre as moléculas do cristal ocorra com perfeição, os ângulos e eixos de simetria seguem determinadas regras geométricas semelhantes às regras de preenchimento de superfícies planas por meio de polígonos regulares.

Como confirma Silva (2011), para que uma superfície plana possa ser obtida por meio de encaixes de certos polígonos, os ângulos internos, formados por um vértice e dois lados ligados a este vértice, precisam ser divisores ou múltiplos de 360. Sendo assim, é possível estabelecer uma fórmula que envolva a <u>quantidade de polígonos</u> (*k*) necessários para formar o ângulo de 360º e a <u>medida dos ângulos internos</u> (*i*) dos polígonos regulares.

- Completamos uma volta quando $k.i = 360º$;
- Não completamos uma volta se $k.i \neq 360º$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, polígonos regulares como o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono são capazes de "cobrir" superfícies planas sem se justapor ou deixar espaços entre si:

[9] "Simetria senária significa que, num giro completo do cristal, a mesma imagem repete-se seis vezes" (BRANCO, 2014b, p.1).
[10] Nesse caso, em um giro completo do cristal a mesma imagem repete-se três vezes (BRANCO, 2014b).

- Para formar o ângulo de 360º com triângulos equiláteros, necessitamos de 6 triângulos, pois 6 × 60º = 360º.

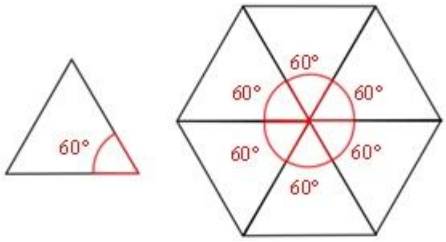


Figura 4: Triângulo equilátero e pavimentação
Fonte: Autoras

- Para obter uma volta completa utilizando quadrados precisamos de quatro quadrados, pois 4 × 90º = 360º.

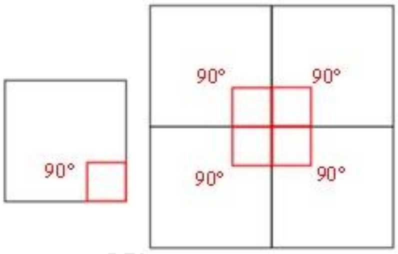


Figura 5: Quadrado e pavimentação
Fonte: Autoras

- Para obter 360º utilizando um hexágono regular precisaremos de três hexágonos, pois 3 × 120º = 360º.

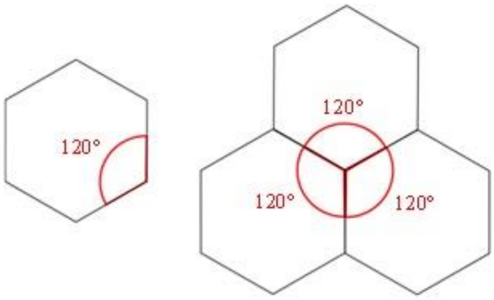


Figura 6: Hexágono regular e pavimentação
Fonte: Autoras

Com base nessas observações podemos estender a ideia para o universo tridimensional. Dessa vez, utilizaremos sólidos que têm bases regulares mostradas acima, mas que também representam alguma estrutura cristalina, como o cubo e o prisma hexagonal, conforme figuras a seguir:

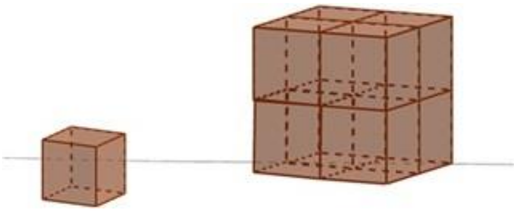


Figura 7: Cubo e sobreposição de cubos.
Fonte: Autoras

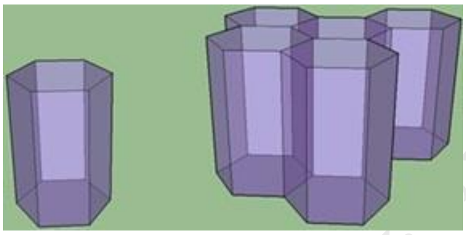


Figura 8: Prisma hexagonal e sobreposição de prismas.
Fonte: Autoras

Com base nas figuras anteriores, é possível verificar que as estruturas cristalinas obedecem certos padrões geométricos. Isso não apenas confere beleza aos cristais como também propriedades únicas. O carbono, por exemplo, pode ser encontrado na forma de grafite ou de diamante, mas tudo dependerá das condições de temperatura e de pressão. As duas estruturas cristalinas possuem base hexagonal, porém o arranjo dos seus átomos é completamente diferente um do outro. Esses arranjos conferem algumas características específicas como dureza e brilho destes elementos (UNESCO, 2014).

Tendo em vista que os cristais podem ser representados por sólidos geométricos, utilizar essa abordagem em sala de aula pode ser favorável para o educador matemático. Nossa próxima discussão será sobre o estudo dos conceitos da Cristalografia como alternativa para o ensino de Matemática, especificamente o ensino da geometria espacial.

Cristalografia no Ensino Médio

No ensino tradicional, a Geometria Espacial é restrita ao estudo das medidas dos sólidos, como cálculo de volumes e áreas de superfície. O professor de Matemática precisa encontrar meios de relacionar o conteúdo com a realidade dos alunos, quer seja uma realidade direta, como verificar se o volume de determinados produtos alimentícios estão de acordo com a descrição rotulada, quer seja uma realidade indireta, como desenvolver funções que reduzam os custos de uma empresa de embalagens, apenas analisando o melhor formato para a fabricação de caixas de papelão.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018) para o Ensino Médio, em seu documento preliminar, prevê que o aluno desenvolva a habilidade de

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados (BRASIL, 2018, p.529).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN+ (BRASIL, 2002) reforçam a ideia de que a Geometria pode ser mais bem trabalhada em sala de aula e critica a forma como o ensino dos conceitos geométricos é realizado.

> A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos (BRASIL, 2002, p.119).

Utilizar de outras áreas do conhecimento, como a Química, para apresentar os conceitos matemáticos faz parte do que chamamos de interdisciplinaridade, entendida como “a transferência de métodos de uma disciplina para outra.” (UNESCO, 1994, p.11). Segundo Nicolescu (1999), podemos separar a interdisciplinaridade em graus: o primeiro se refere à aplicação; o segundo se relaciona com o grau epistemológico ou transferência de métodos; e o terceiro sendo gerador de novas disciplinas, quando as áreas envolvidas se interligam tão intensamente que determinam uma nova teoria.

Para a elaboração das atividades, optamos por uma Sequência Didática – SD, embasada na teoria de que o processo de aprendizagem é contínuo e dependente dos estudos dos anos posteriores. Discorremos brevemente sobre os principais aspectos dessa teoria e apresentamos as atividades que seguem como sugestão para o ensino proposto às aulas de Matemática no Ensino Médio.

Sequência Didática e principais aspectos

De acordo com Gonçalves e Ferraz (2016) o termo Sequência Didática surgiu na França, em 1996. Inicialmente, os estudos da SD estavam voltados para o ensino de línguas em que as atividades eram elaboradas de modo sistemático e com objetivos específicos na intenção de promover o domínio das situações de comunicação por parte dos alunos. Com o passar dos anos, outras áreas do conhecimento também aderiram às SDs, uma vez que esse esquema didático leva em consideração os conhecimentos prévios dos alunos.

Conforme Zabala, a definição para SD é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (1998, p.18). Portanto, todas as etapas desse processo de aprendizagem são conhecidas pelo docente e pelos estudantes.

Na defesa de Zabala (1998), a elaboração das atividades deve considerar os conhecimentos prévios dos alunos e, desse modo, contribuir para a sua formação em cidadãos conscientes capazes de transformar o ambiente em que vivem.

Para elaborar uma SD, o docente esboça uma trajetória didática partindo dos conhecimentos prévios dos alunos e que alcance o objetivo principal de ensinar o conteúdo específico. Porém, é preciso ter uma estratégia que encadeie o máximo de saberes possíveis para que os estudantes compreendam o assunto, não apenas a fim de concluirem a atividade, mas também para que se apropriem do conhecimento e relacionem com as atividades cotidianas.

Por meio de uma SD, o professor de Matemática pode propor uma atividade investigativa no intuito de explorar e analisar os resultados encontrados pelos próprios estudantes com o auxílio do docente. Como apontam Lins e Gimenez (2001) a apropriação do conhecimento possibilita a experimentação, a generalização, a abstração e a formação de significados aos termos estudados.

Peretti e Costa (2013) asseguram que a SD permite que haja a interdisciplinaridade ao tratar não apenas dos conteúdos específicos da disciplina, já que resgata os conhecimentos adquiridos em outras áreas que são necessários para a realização das atividades propostas. Em consideração aos aspectos da SD apresentados neste artigo, elaboramos atividades de acordo com os seguintes critérios:

- Disponibilidade: fácil acesso à atividade caso estejam em bibliotecas ou disponíveis na internet;
- Recursos: os recursos utilizados para elaboração e execução da atividade precisam ser simples e de fácil acesso;
- Objetividade: as atividades precisam relacionar Cristalografia com conteúdos da Matemática (de preferência Geometria) e, além disso, ressaltar os aspectos importantes da ciência dos cristais;
- Interatividade: as atividades precisam promover uma boa interatividade entre alunos e professor.

Atividades sugeridas para o ensino de Geometria Espacial

Sugerimos uma sequência didática composta por quatro atividades. Descrevemos a seguir os aspectos e objetivos de cada uma. A duração das atividades deve estar de acordo com o cronograma do docente, por isso deixamos livre o tempo de aplicação das atividades.

Atividade 1: Pesquisa sobre as propriedades dos cristais e seu uso cotidiano

Objetivo: Conhecer sobre variáveis cristais e a organização das células cristalinas.

O docente solicita aos alunos que realizem uma breve pesquisa sobre as propriedades físicas e químicas dos principais cristais. Devem ser pesquisados ao menos cinco minérios (cristais) distintos e, de preferência, com as seguintes informações: cores frequentes, resistência, local de extração, em que é utilizado e, se possível, aspectos históricos. A pesquisa objetiva introduzir o conteúdo proposto em sala de aula e despertar o interesse dos alunos pelo assunto. O docente deve apresentar as definições de sistema cristalino e célula unitária de cristais após a entrega das pesquisas.

Atividade 2: Conhecendo os sólidos geométricos

Objetivos: Definir conceitos de polígonos regulares, prismas e pirâmides. Calcular áreas de polígonos regulares. Calcular volume de prismas.

Mais uma vez, os alunos realizam uma pesquisa sucinta sobre os principais sólidos geométricos, mas agora acompanhados pelo professor. O docente pode utilizar o livro didático ou encaminhá-los à biblioteca (da escola ou da cidade, se possível) ou contar com outros locais disponíveis para consultar fontes bibliográficas. O objetivo da pesquisa é que os estudantes reconheçam os principais sólidos geométricos e saibam como calcular valores de áreas e volumes.

Inicialmente, o professor faz um resgate histórico sobre a Geometria, sempre enfatizando a necessidade de estudá-la desde a Antiguidade. Logo após, os estudantes devem procurar nas fontes sobre os polígonos regulares: o que é um polígono regular e quais são os principais. Após a coleta de informações, o docente enfatiza as propriedades de pavimentação dos seguintes polígonos regulares: quadrado, triângulo equilátero e hexágono.

Feito isso, os estudantes pesquisam sobre os sólidos geométricos derivados desses três polígonos, sejam prismas ou pirâmides. O professor solicita que encontrem as fórmulas para cálculo de áreas da superfície e volumes dos sólidos: cubo, prisma hexagonal e prisma triangular, sem explicação prévia. Além disso, o professor deve instigar os alunos para que relacionem as fórmulas de cálculo de áreas de polígonos com as encontradas. Feito isso, o docente explica o assunto e mostra a relação entre as fórmulas, enfatizando os principais elementos dos sólidos: vértices, arestas e faces. A princípio é interessante apenas o estudo de prismas, pois serão enfatizados na próxima atividade.

Atividade 3: Identificação dos sólidos geométricos e de células unitárias cristalinas

Objetivos: Identificar a forma geométrica de um cristal por meio da célula unitária. Descrever aspectos importantes sobre um cristal. Resolver problemas com base nos estudos anteriores.

Em grupos, os aluno escolhem um cristal apresentado no quadro ou pelo(a) professor(a) e realizam a pesquisa solicitada.

Para esta atividade, o aluno deve identificar e relacionar os sólidos geométricos com os quais se assemelham as células unitárias dos cristais ilustrados sabendo que estão na forma bruta.

No caso da relação Massa por Volume, é necessário que os alunos conheçam a equação da densidade e que a unidade trabalhada seja g/cm³. É recomendável que o docente recorde sobre algumas conversões de unidade e sobre a fórmula da densidade:

$$densidade = \frac{massa}{volume}$$

Já para encontrar volume, altura e área da superfície do sólido pela densidade, dado um peso fixo e escolhendo uma relação para a aresta da base regular do sólido geométrico, os estudantes devem calcular o volume, a altura e área da superfície (base e lateral) utilizando a equação da densidade, pois os sólidos serão construídos de acordo com a estrutura do cristal escolhido.

Atividade 4: Construindo uma célula unitária cristalina

Objetivos: Cosntruir a representação de uma célula unitária cristalina. Socializar os resultados da pesquisa anterior.

Em grupos, os alunos constroem uma representação da célula unitária do cristal escolhido utilizando os materiais indicados. Além disso, devem se organizar para apresentar seus trabalhos na escola, retratando sobre como fizeram a construção da célula unitária e expondo as características do cristal escolhido, já vistas na pesquisa proposta pela Atividade 3.

Com essas atividades esperamos que os alunos compreendam sobre algumas das diversas utilidades dos cristais e como a Matemática está intimimamente relacionada ao seu estudo. Acreditamos que a Cristalografia permite que muitas das propriedades dos sólidos geométricos sejam estudadas e vistas em prática no desenvolvimento da Medicina e das Tecnologias, principais setores de investimento na atualidade.

O docente em Matemática pode optar por trabalhar outros vários temas transversais com a Cristalografia, além da densidade, como mostramos. Existem outros assuntos que podem ser explorados como as funções (relação massa e volume), ângulos (ao estudar sobre os raios–X e incidência dos raios), Matemática Financeira (analisar os custos, benefícios e pontos negativos da exploração de cristais no mundo), entre outros.

Conclusão

Nossa preocupação está voltada para o modo de ensinar e como podemos contribuir para a formação cidadã dos alunos. A Cristalografia se relaciona com a Matemática, nos estudos das formas dos cristais e suas propriedades, contemplando os aspectos geométricos e como esses interferem nas características dos cristais. Os sólidos geométricos podem ser bons representantes das formas cristalinas justificando algumas propriedades de diversos minerais, como a rigidez e a transposição de calor.

É possível trabalhar com o tema para uma turma de Ensino Médio, por meio da interdisciplinaridade entre Química e Matemática, usando o estudo de elementos da natureza. Esse tema não somente permite estudar conteúdos matemáticos, como também mostrar aos estudantes as importantes contribuições que esses minerais trouxeram para o desenvolvimento das Tecnologias, da Medicina e de tantas outras áreas.

As sequências didáticas, juntamente com a teoria da Interdisciplinaridade, permitem ao educador que diversos temas tranversais possam ser discutidos e trabalhados em sala de aula, além de enriquecer o conhecimento dos alunos, pois não estarão limitados aos conteúdos tradicionais, muitas vezes desconexos entre si e da realidade.

Acreditamos que com a SD proposta por nós é possível estender o estudo a outros temas, como mencionado na seção anterior. O professor é livre para fazer as alterações que achar pertinentes e adequar as atividades à sua realidade de sala, pois compreendemos que há uma diversidade de alunos que pertencem a grupos sociais distintos.

Outro fator que consideramos importante na elaboração deste artigo foi associar, ao menos na tentativa, um tema raramente discutido em sala de aula com um conteúdo matemático. Isso é possível com muitos outros assuntos e que estão implicitamente envolvidos com o nosso cotidiano. Assim, podemos contribuir para que os alunos desenvolvam um olhar mais crítico sobre as situações que os cercam e como estão relacionadas.

A busca por abordagens alternativas de ensino deveria ser preocupação de todos os educadores, quaisquer que sejam seus campos de atuação. Um educador compreende que é preciso saber muito mais do que apenas os conteúdos específicos de sua formação: é necessário que se conheça um pouco de cada ciência para que se possa utilizar a infinidade de recursos e estudos que todas as demais nos oferecem.

Referências

BRANCO, Pércio de Moraes. **Dicionário de mineralogia e gemologia.** 2. ed. revisada e ampliada. São Paulo: Oficina de Textos, 2014a.

BRANCO, Pércio de Moraes. Sistemas Cristalinos. Canal Escola. 2014b. Disponível em: http://www.cprm.gov.br/publique/Redes-Institucionais/Rede-de-Bibliotecas---Rede-Ametista/Canal-Escola/Sistemas-Cristalinos-1279.html?tpl=printerview . Acesso em 01 maio 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC. Brasília, DF, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 04 jun. 2017.

CALLISTER, William D. **Materials science and engineering**. Nova York: John Wiley & Sons Inc., 1991. Disponível em: http://www.ufrgs.br/petmateriais/graduacao/

bibliografias/calliester/Callister_-_Engenharia_e_Cincia_dos_Materiais_ptg_%20-TRADUCAO.pdf/at_download/file. Acesso em: 04 jun. 2017.

GONÇALVES, Adair Vieira; FERRAZ, Mariolinda Rosa Romera. Sequências Didáticas como instrumento potencial da formação docente reflexiva. D.E.L.T.A., v. 32, n.1, p. 119-141, 2016.

GONÇALVES, Cristina Freitas. Novos materiais: síntese, crescimento e propriedades físicas. Capítulo III: Cristalografia. Dissertação de Mestrado em Física. Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2006. Disponível em: https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/5623/5/Cap%C3%ADtulo%20III%20-%20Cristalografia.pdf. Acesso em: 04 jun. 2017.

HISTORIA DE LA CRISTALOGRAFÍA. Universidad de Valladolid, Espanha. ACPC. 2013. Disponível em: http://www4.uva.es/goya/Intranet/Pages/programas/sintesis/2012-2013/Historia%20de%20la%20Cristalograf%C3%ADa.pdf. Acesso em: 04 jun. 2017.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001.

MACHADO, Fábio Braz. Carbonatos. Catálogo de carbonatos disponibilizado pela UNESP. Disponível em http://www.rc.unesp.br/museudpm/banco/carbonatos/carbonatos.html. Acesso em 07 de mar. de 2018.

NICOLESCU, Basarab. Um novo tipo de conhecimento**:** Transdisciplinaridade. 1º Encontro Catalisador do CETRANS – Escola do Futuro – USP. Itatiba, São Paulo, 1999. Disponível em: http://www.ufrrj.br/leptrans/arquivos/conhecimento.pdf. Acesso em: 07 de mar. de 2018.

NUNES, Elias; NÓBREGA JR., Orgival Bezerra. Minerais e Rochas. Apresentação para disciplina de Geografia Física I na Universidade Estadual da Paraíba. Paraíba, 2009. Disponível em: http://www.ead.uepb.edu.br/ava/arquivos/cursos/geografia/geografia_fisica_I/Geo_Fis_A04_RF_MZ_SF_SI_SE_040309_Mac.pdf. Acesso em: 09 de jun. de 2018.

PERETTI, Lisiane; COSTA, Gisele Maria Tonin da. Sequência Didática na Matemática. REI, Revista de Educação do Ideau. Getúlio Vargas, v. 8, n. 17, jan.-jun. 2013. Disponível em: http://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/31_1.pdf. Acesso em: 02 fev. 2018.

ROSS, André. René Just Haüy. Loze – Dion éditeur. Notes historiques. 2014. Disponível em: https://www.lozedion.com/wp-content/uploads/2014/09/Hauy.pdf. Acesso em: 07 mar. 2018.

SILVA, Maria Simone Calixto. Ensinando Matemática através dos mosaicos. Campina Grande – PB, 2011.

UNESCO. Educação e Transdisciplinaridade. Convento de Arrábida, 6 de novembro de 1994. Comitê de Redação Lima de Freitas, Edgar Morin e Basarab Nicolescu. 1994. Disponível em: http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001275/127511por.pdf. Acesso em: 04 jun. 2017.

UNESCO. Cristalografia e aplicações: no íntimo da matéria. Informativo IYCR: Ano Internacional da Cristalografia. 2014. Disponível em: http://www.iycr2014.org/__data/assets/pdf_file/0011/98309/Cristalografia-e-aplicacoes_no-intimo-da-materia_final-2.pdf. Acesso em 07 mar. 2018.

VELOSO, Antônio José Barros. Kepler e a Ciência Moderna. Mestrado de História e Filosofia da Ciência. Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, 2004. Disponível em http://cfcul.fc.ul.pt/biblioteca/online/pdf/antoniobveloso/keplerciencia moderna.pdf. Acesso em 07 mar. 2018.

ZABALA, Antoni**. A prática educativa**: como ensinar**.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

CRYSTALLOGRAPHY AND APPLICATIONS IN SPACE GEOMETRY EDUCATION

ABSTRACT

This paper is the result of a study done in the classes of Interface da Química com a Matem - IQMM7, taught for the course of Degree in Mathematics of the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo . Considering the various applications of Crystallography in everyday life and its relation with geometric concepts, we try to present the geometric forms of crystal molecules and relate them to the teaching of Spatial Geometry. Our focus is to show Crystallography as an interdisciplinary topic for Mathematics and Chemistry classes in High School so that students understand the relevance of this area of study to the world and how these disciplines may be related. There are several possible approaches to the subject in the classroom, so we suggest some activities to be applied through a Didactic Sequence. We are based on information from UNESCO (2014) that dealt with the year of Crystallography in 2014 and its importance to the world, as well as the studies on geometric forms of Silva (2011) and on the theory of Didactic Sequences by Zabala (1998).

Keywords: *Crystallography; Interdisciplinarity; Geometrical concepts.*

Envio: agosto/2018
Aceito para publicação: janeiro/2019

ANEXO

Proposta de Sequência Didática – versão para alunos

ATIVIDADE 1: Pesquise sobre as principais propriedades dos cristais, o que é um sistema cristalino e uma célula unitária. Encontre outras informações como: cores frequentes, resistência do cristal, local de extração, em que é utilizado, densidade, a qual sistema cristalino o cristal pertence e curiosidades. Devem ser pesquisados **no mínimo** cinco cristais.

ATIVIDADE 2: Com auxílio do(a) professor(a), pesquise sobre polígonos regulares e sólidos geométricos. Anote e analise as fórmulas para cálculos de áreas e de volumes. Se possível, desenhe e identifique todos os sólidos que encontrar. Além disso, procure sobre o cálculo da densidade e destaque as grandezas que a compõe.

ATIVIDADE 3: Em grupos, escolha um dos cristais do quadro seguinte ou dos que foram apresentados pelo(a) professor(a). Procurem imagens do cristal, em especial na forma bruta.

Cristal	Densidade (g/cm^3)	Sistema Cristalino
Berilo	2,65	Hexagonal
Cianita	3,50	Tetragonal
Diamante	3,50	Cúbico
Esmeralda	2,70	Hexagonal
Granada	3,80	Cúbico
Quartzo	2,65	Trigonal
Rubi	4,00	Trigonal
Zircão	4,66	Tetragonal

Figura 9: Cristais com respectivos sistemas cristalinos e densidade
Fonte: Autoras

Desenvolvam uma pesquisa escrita sobre o cristal seguindo os tópicos:
- Principais propriedades: densidade, dureza, brilho...;
- Imagens do cristal na forma bruta e lapidada;
- Sistema cristalino e célula unitária (é preciso que desenhem o formato da célula unitária do cristal);
- Locais de extração;
- Utilização do cristal;

- Aspectos históricos;
- Curiosidades;
- Resolução do problema abaixo:

Suponha que há 200g do cristal escolhido que será utilizado para construir uma obra de arte. O artista conhece muito sobre os cristais e decidiu fazer uma escultura que se assemelhe à forma da célula unitária desse cristal. Ele deseja que a altura da escultura seja o dobro da medida da aresta da base, se o cristal ***<u>não</u>*** *pertencer ao sistema cúbico nem ao sistema trigonal; ou que a altura e a medida da base sejam iguais caso o cristal pertença a um desses dois sistemas. Descubra:*

- *O volume da escultura (em cm³);*
- *A medida da aresta (da base) e da altura da escultura;*
- *A área da superfície da escultura.*

Lembrem-se de colocar a resolução passo a passo do problema! Em caso de dúvidas, procure o(a) professor(a).

ATIVIDADE 4: Nos mesmos grupos, construam uma representação da célula unitária do cristal escolhido na Atividade 3. Podem ser utilizados palitos de madeira para montar a estrutura e papéis transparentes para cobrir a “célula”. Façam fichas-resumo com as informações da pesquisa e apresentem o cristal para seus colegas.