

Modelagem Matemática da Percepção Sonora pelo Ouvido Humano via Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Mathematical Modeling of Human Auditory Perception Using Second-Order Ordinary Differential Equations

Felipe Rodrigues Chaves

Graduação em Matemática

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo

<https://orcid.org/0009-0007-9777-1184>

felipe.chaves@aluno.ifsp.edu.br

Luciano Aparecido Magrini

Doutor em Computação Aplicada pelo Instituto Nacional de Ciências Espaciais

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo

<https://orcid.org/0000-0002-8695-0992>

magrini@ifsp.edu.br

Patrícia Neves de Araújo

Doutora em Matemática Aplicada pelo Instituto de Matemática e Estatística

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo

<https://orcid.org/0000-0001-9456-6205>

patricia.araujo@ifsp.edu.br

Histórico do artigo

Recebido: 08 dez. 2025

Aprovado: 12 mar. 2026

Publicado: 18 mar. 2026

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo analisar os aspectos fisiológicos da audição humana (Guyton e Hall, 2017) e, a partir desses aspectos, construir um modelo matemático utilizando Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem (Boyce e DiPrima, 2012), com base no modelo oscilatório proposto por Benson (2003). Esse modelo se propõe a representar a vibração da membrana basilar, presente no interior do ouvido humano, e interpretar analiticamente a forma como diferentes sons são recebidos pela membrana, analisando a distribuição de frequências ao longo da cóclea. Além deste modelo inicial, também foi proposto um segundo modelo considerando a perda auditiva relacionada ao envelhecimento (Wang e Puel 2020; Gates e Mills, 2005). Após as deduções e análise das soluções analíticas dos modelos, foram realizadas simulações utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Burden e Faires, 2020), nas quais foram comparados os dois modelos e foi realizada uma discussão quanto à simulação numérica e à descrição fisiológica. Após análise das modelagens propostas, resoluções analíticas e simulações numéricas, concluímos que há uma coerência entre os modelos propostos e o funcionamento auditivo, propondo, assim, uma abordagem teórica e computacional para a compreensão da percepção sonora humana.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias (EDOs); membrana basilar; modelagem matemática; percepção sonora; presbiacusia.

ABSTRACT

This work aimed to analyze the physiological aspects of human hearing (Guyton and Hall, 2017) and, based on these aspects, to construct a mathematical model using second-order ordinary differential equations (Boyce and DiPrima, 2012), grounded in the oscillatory model proposed by Benson (2003). This model aims to represent the vibration of the basilar membrane, located inside the human ear, and interpret analytically how different sounds are received by the membrane, analyzing the distribution of frequencies along the cochlea. In addition to this initial model, a second model was also proposed considering hearing loss due to aging (Wang e Puel, 2020; Gates, 2005). After deriving and analysing of the analytical solutions of the models, simulations were carried out using the fourth-order Runge–Kutta method (Burden and Faires, 2020), in which the two models were compared and a discussion was held between the numerical simulation and the physiological description. After the proposed

modelings, analytical solutions, and numerical simulations, the work concluded that there is coherence between the proposed models and auditory functioning, thus offering a theoretical and computational approach for understanding human sound perception.

Key-words: ordinary differential equations (ODEs); basilar membrane; mathematical modeling; sound perception; presbycusis.

Introdução

A audição humana é um processo fisiológico que envolve a transformação de variações de pressão do ar em ondas sonoras e em impulsos elétricos que são interpretados pelo cérebro. Uma das principais partes desse processo é a membrana basilar, localizada na cóclea, que possui uma estrutura elástica na qual cada uma de suas regiões permite a distinção de diferentes faixas de frequência de acordo com a característica elástica de cada local. Locais mais rígidos são sensíveis a frequências altas, e locais mais flexíveis a frequências baixas. Este é um fenômeno conhecido como tonotopia (Guyton e Hall, 2017).

Este trabalho se fundamenta em aspectos fisiológicos da audição humana descritos por Guyton e Hall (2017) e em ideias propostas por Benson (2003), que utiliza equações diferenciais para representar oscilações harmônicas aplicadas a diferentes sons. Também foram utilizados os resultados apresentados por Boyce e DiPrima (2012) como fundamentação principal para Equações Diferenciais Ordinárias.

Com isso, é possível desenvolver um modelo matemático que descreve a resposta vibratória da membrana basilar a diferentes frequências sonoras. Pode-se construir também outro modelo, considerando alterações fisiológicas associadas ao envelhecimento descritas por Wang e Puel (2020) e por Gates e Miles (2005). A aplicação dos modelos foi realizada analiticamente e numericamente através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Preliminares

Nesta seção, são apresentados alguns conceitos fundamentais para a compreensão do desenvolvimento teórico deste trabalho, com foco em Equações Diferenciais Ordinárias lineares de segunda ordem homogêneas, suas soluções e propriedades.

Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Neste trabalho, utilizam-se as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de segunda ordem como ferramenta de modelagem matemática. De acordo com Boyce e DiPrima (2012), uma EDO de segunda ordem homogênea pode ser escrita na forma geral

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

em que $y(t)$ é a função real desconhecida, $p(t)$ e $q(t)$ são funções reais e contínuas de uma variável $t \in R$, e os termos da equação dependem exclusivamente de y ou de suas derivadas. A equação é chamada de *homogênea* por não apresentar termo independente de y .

No caso específico de coeficientes constantes, a equação assume a forma:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{1}$$

com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$. O objetivo, neste caso, é encontrar uma função $y(t)$ que satisfaça a equação dada, isto é, que torne sua igualdade verdadeira para todo t no domínio considerado.

Exemplos de dedução de EDOs:

Exemplo 1: Considere um sistema em que um corpo de massa m está sujeito a uma força restauradora elástica, cuja intensidade é proporcional ao deslocamento $y(t)$ e cuja direção é oposta ao movimento. Pela **Lei de Hooke**, tem-se:

$$F = -ky(t). \quad (2)$$

De acordo com a **Segunda Lei de Newton**, a força resultante sobre uma massa m é igual ao produto dessa massa pela aceleração a :

$$F = m \cdot a.$$

Como a aceleração é dada por $a = \frac{d^2y}{dt^2}$, obtêm-se:

$$F = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \quad (3)$$

Assumindo que a única força atuante no modelo é a força elástica (desconsiderando efeitos como atrito ou amortecimento), igualando as equações (2) e (3):

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -ky(t)$$

Dividindo ambos os lados da equação por m , com $m \neq 0$, obtêm-se a equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y(t) = 0$$

Como k e m são constantes reais, define-se $K = \frac{k}{m} > 0$, que representa a razão entre rigidez e massa do sistema. Assim, a equação pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky(t) = 0 \quad (4)$$

Exemplo 2: Considere um sistema de massa m e constante elástica k (ambas reais e positivas), sujeito não apenas a uma força restauradora elástica, mas também a uma força de amortecimento proporcional à velocidade.

Pela **Lei de Hooke**, a força elástica é dada por (2):

$$F_{elástica} = -ky(t)$$

A **força de amortecimento** é proporcional à velocidade do corpo e contrária ao movimento:

$$F_{amort} = -c \frac{dy}{dt} \quad (5)$$

De acordo com a **Segunda Lei de Newton**, a força resultante sobre um corpo de massa m é (3):

$$F = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

Considerando que a força resultante é a soma da força elástica (2) e da força de amortecimento (5), tem-se:

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -c \frac{dy}{dt} - ky(t)$$

Reorganizando os termos:

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky(t) = 0$$

Dividindo ambos os lados da equação por m , com $m \neq 0$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

Definindo $C = \frac{c}{m} > 0$ e $K = \frac{k}{m} > 0$, que representam, respectivamente, o coeficiente de amortecimento e a razão entre rigidez e massa do sistema, a equação pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{dy}{dt} + Ky(t) = 0 \quad (6)$$

Teorema da Existência e Unicidade

Um ponto importante para a fundamentação quanto a EDOs é a garantia da existência de soluções únicas. Essa garantia é dada pelo *Teorema da Existência e Unicidade* (TEU) que assegura que, dado um problema de valor inicial:

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

se a função $F(t, x)$ for contínua em uma vizinhança do ponto (t_0, x_0) e satisfizer a condição de Lipschitz em relação a x , ou seja, existir $L > 0$ tal que:

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

para todos os x_1, x_2 próximos de x_0 , então existe um intervalo em torno de t_0 no qual o problema possui uma única solução.

Essa estrutura teórica garante que soluções possam ser encontradas, e também fundamenta a aplicação de métodos computacionais para a obtenção de soluções numéricas. O TEU assegura que, ao se utilizar algoritmos numéricos para a obtenção de uma EDO, linear ou não, como o método de Euler ou Runge-Kutta, os resultados obtidos são próximos o suficiente de uma solução real, e que essa solução é única. Uma demonstração completa desse teorema

pode ser encontrada em Sotomayor (1979), em que o autor apresenta e o demonstra como teorema de Picard.

Princípio da Superposição

Dentre as propriedades das EDOs lineares homogêneas, tem-se o *Princípio da Superposição*, enunciado a seguir.

Propriedade: Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

então qualquer combinação linear das soluções, ou seja,

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in R,$$

também é solução da equação.

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada no apêndice desse trabalho.

Soluções da Forma Exponencial

A forma exponencial das soluções é uma das principais estratégias para resolver EDOs homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. O resultado a seguir formaliza essa ideia.

Proposição: Seja $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ uma EDO linear homogênea com coeficientes constantes. Se r_1 é raiz da equação característica $ar^2 + br + c = 0$, então a função $y(t) = ke^{r_1t}$, com $k \in R^*$, é solução da equação diferencial.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada no apêndice desse trabalho.

Combinação Linear e Independência das Soluções

A partir do *Princípio da Superposição* e da construção de soluções na forma exponencial, verifica-se que toda solução da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

pode ser expressa como uma combinação linear de duas soluções y_1 e y_2 , obtidas a partir das raízes da equação característica associada:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{7}$$

Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas da equação (7), as funções $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são linearmente independentes e o conjunto $\{y_1, y_2\}$ constitui uma base para o espaço solução da equação diferencial, então a solução geral pode ser escrita como:

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in R.$$

A verificação da independência linear entre y_1 e y_2 pode ser realizada por meio do *Wronskiano*, definido por:

$$W(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

Se existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$, em algum intervalo real, então as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Um exemplo de verificação de independência linear utilizando o wronskiano pode ser encontrado no apêndice desse trabalho.

Soluções Analíticas de EDOs de Segunda Ordem

Conforme discutido no *Princípio da Superposição*, qualquer solução de uma EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

pode ser escrita como combinação linear de duas soluções linearmente independentes. Pelo Teorema de Existência e Unicidade, o espaço solução é bidimensional. Assumindo soluções da forma exponencial $y(t) = e^{rt}$, obtemos a equação característica (7):

$$ar^2 + br + c = 0,$$

cuja solução determina a forma geral da EDO.

Dependendo das raízes da equação característica, há três casos distintos. O estudo completo de cada um dos casos pode ser encontrado em Boyce e Diprima (2012).

Raízes reais e distintas

Se $r_1 \neq r_2$ são raízes reais da equação característica, cada raiz gera uma solução exponencial

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, \quad y_2(t) = e^{r_2 t}.$$

Essas soluções são linearmente independentes (o que pode ser verificado pelo Wronskiano), garantindo que a solução geral seja:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Raízes reais iguais

Se a equação característica possui uma raiz dupla r , uma solução é $y_1(t) = e^{rt}$. Para encontrar uma segunda solução linearmente independente, assume-se $y_2(t) = te^{rt}$. Substituindo na EDO:

$$y_2' = e^{rt} + rte^{rt}, \quad y_2'' = 2re^{rt} + r^2 te^{rt},$$

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = [(2ar + b) + t(ar^2 + br + c)]e^{rt} = 0,$$

pois r é raiz dupla da equação característica, anulando ambos os termos.

Portanto, a solução geral é:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{rt}. \quad (9)$$

Raízes complexas conjugadas

Se as raízes são complexas $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$), temos soluções complexas:

$$y_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad y_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

Aplicando a fórmula de Euler, obtemos soluções reais linearmente independentes:

$$u(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad v(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

A independência linear pode ser confirmada pelo Wronskiano. Assim, a solução geral real é:

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)). \quad (10)$$

Dessa forma, as três possibilidades para as raízes da equação característica determinam completamente a solução geral de qualquer EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

Exemplos de Resolução de EDOs de segunda ordem

Exemplo 4: Partindo da equação (4), tem-se

$$y'' + Ky = 0,$$

o que caracteriza uma EDO homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, conforme a forma geral apresentada em (1). A equação característica associada, conforme (7), é:

$$r^2 + K = 0 \quad (11)$$

Subtraindo K em ambos os lados da equação (11), obtém-se

$$r^2 = -K,$$

cujas raízes são complexas conjugadas

$$r_1 = +i\sqrt{K}, \quad r_2 = -i\sqrt{K}.$$

De acordo com a equação (10), a solução geral da EDO pode ser expressa por

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{K}t) + C_2 \cos(\sqrt{K}t), \quad (12)$$

em que C_1 e C_2 são constantes reais, determinadas pelas condições iniciais do sistema analisado.

Exemplo 5: A equação (6) está associada à equação característica, na forma (7)

$$r^2 + Cr + K = 0 \quad (13)$$

e permite uma análise da solução por meio de seu discriminante

$$\Delta = C^2 - 4K.$$

Com base no valor de Δ , o sistema pode ser classificado em três regimes distintos de amortecimento:

1. **Amortecimento crítico** ($\Delta = 0$): ocorre quando $C^2 = 4K$, ou seja, o sistema retorna ao estado de equilíbrio no menor tempo possível sem oscilar. A solução geral é dada por (9).
2. **Superamortecimento** ($\Delta > 0$): ocorre quando $C^2 > 4K$, caracterizando uma dissipação de energia tão intensa que impede qualquer tipo de oscilação. A solução geral é da forma (8).
3. **Subamortecimento** ($\Delta < 0$): ocorre quando $C^2 < 4K$, permitindo oscilações no sistema, porém com amplitude decrescente. A solução geral assume a forma (10).

No caso subamortecido ($\Delta < 0$), a equação (13) admite raízes complexas:

$$r = \frac{-C}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4K - C^2}}{2}$$

Portanto, a solução geral da equação (13) é dada por:

$$y(t) = e^{\frac{-C}{2}t} \left(A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2}t\right) + A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2}t\right) \right) \quad (14)$$

em que A_1 e A_2 são constantes reais determinadas pelas condições iniciais.

Método numérico

Na parte computacional, será utilizado o método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para a resolução aproximada das EDOs. De acordo com Burden e Faires (2020), este método oferece uma boa combinação entre precisão e eficiência computacional. Considerando o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

o RK4 fornece a solução aproximada segundo as expressões:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

no qual h é o passo de integração, que é definido de acordo com cada problema; quanto menor o h , mais precisa será a aproximação do problema, mas maior é o gasto computacional; geralmente usar um RK de ordem superior a 4 implica em ganho mínimo em termos de aproximação, mas aumenta consideravelmente a complexidade do algoritmo utilizado. Esse método foi utilizado para aproximar numericamente as soluções dos modelos propostos ao longo deste trabalho.

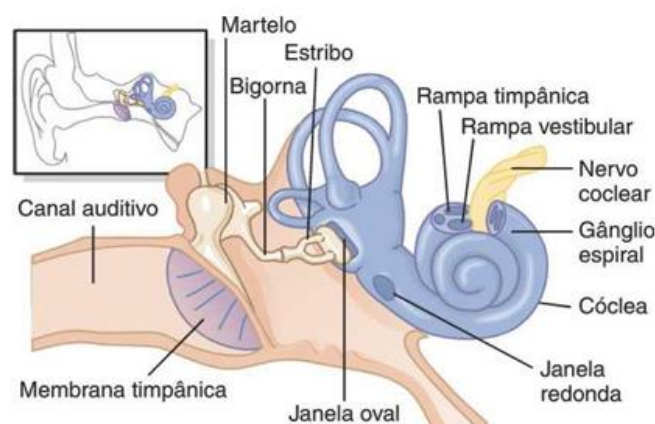
Aspectos Fisiológicos da Audição Humana

Com a fundamentação matemática feita, é necessário entender a parte fisiológica da audição humana para que a modelagem possa ser feita da maneira correta, respeitando a fisiologia. Esse capítulo expõe as características e o funcionamento mecânico do ouvido humano.

Toda a análise apresentada nesta seção é baseada nos conceitos e descrições fornecidos por Guyton e Hall no capítulo 52 do livro *Tratado de Fisiologia Médica* (2017), que constitui a principal fonte de fundamentação teórica sobre os mecanismos fisiológicos da audição humana utilizados nesta pesquisa.

Segundo Guyton e Hall (2017), o processo de audição humana inicia-se com a captação das ondas sonoras pelo pavilhão auricular, estrutura externa do ouvido responsável por direcionar o som para o canal auditivo, também conhecido como orelha. Essas ondas sonoras, que são variações de pressão do ar, viajam até a membrana timpânica, que vibra, de acordo com a frequência e intensidade da onda, em resposta a essas variações. As estruturas envolvidas nessa etapa inicial, que são o pavilhão auricular, o canal auditivo e a membrana timpânica, estão representadas na Figura 1, que mostra a anatomia do ouvido humano.

Figura 1. Anatomia do Ouvido Humano.



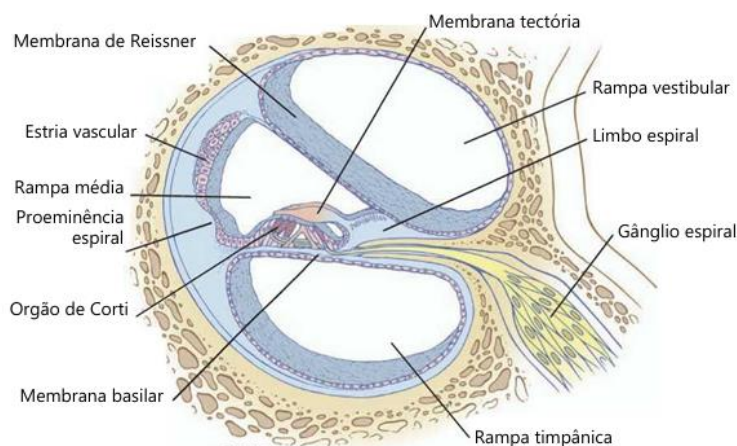
Fonte: Guyton e Hall, 2017.

A vibração da membrana timpânica é transmitida através dos ossículos do ouvido médio (martelo, bigorna e estribo). Esses ossículos formam algo similar a um sistema de alavancas que aumenta as vibrações recebidas e as leva até a janelas oval, na entrada da cóclea. Esse mecanismo biológico proporciona um ajuste da transmissão de vibração em diferentes meios

(equalização de impedância), que torna a passagem do som do ar para o líquido coclear mais fácil.

A cóclea, ilustrada na Figura 2, é uma estrutura em espiral composta por três partes principais (rampa vestibular, rampa média e rampa timpânica). A imagem mostra um corte transversal da cóclea, permitindo visualizar esses compartimentos e mostra a posição da membrana basilar.

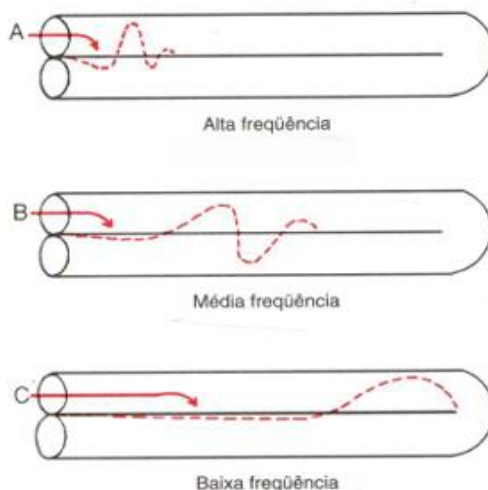
Figura 2. Corte transversal da Cóclea.



Fonte: Guyton e Hall, 2017.

A membrana basilar apresenta características diferentes em cada uma de suas regiões. Na região mais próxima da base da cóclea (região da janela oval), a membrana é mais estreita, espessa e mais **rígida**. Já na direção ao ápice (helicotrema), ela apresenta uma característica mais larga, fina e **flexível**. Por esse motivo, ela responde de maneira diferente a cada faixa de frequência: sons agudos **provocam maior vibração na base**, por ter uma rigidez maior necessita de uma vibração mais intensa para ser estimulado, enquanto sons graves vibram **mais no ápice da membrana**. Esse fenômeno, conhecido como tonotopia, está representado na Figura 3, que mostra a membrana esticada, onde é possível visualizar como diferentes regiões da membrana basilar respondem a diferentes faixas de frequência.

Figura 3. Membrana basilar esticada, mostrando diferentes frequências em cada região.



Fonte: Guyton e Hall, 2005.

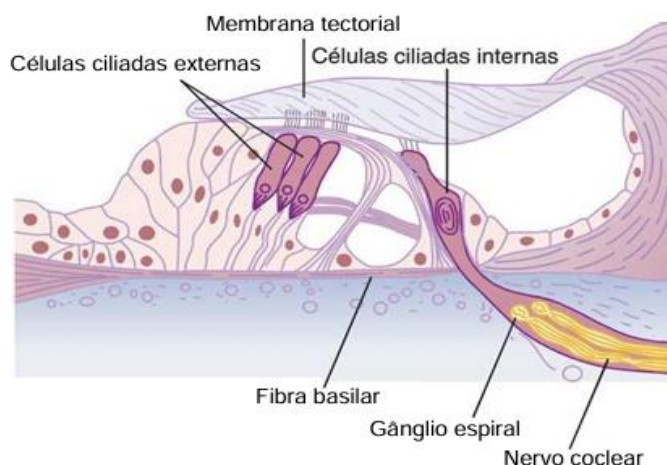
Essa organização das frequências sonoras permite ao sistema auditivo realizar uma análise espectral do som (decomposição do som em diferentes frequências), que não será explorada a fundo nesse trabalho, porém abre caminhos interessantes para estudos futuros.

As frequências sonoras perceptíveis ao ser humano são classificadas em três faixas principais: **graves de 20 Hz a 250 Hz, médias de 250 Hz a 2.000 Hz e agudas acima de 2.000 Hz até cerca de 20.000 Hz**, conforme os estudos de psicoacústica e engenharia de áudio de Moore (2012). O intervalo de frequência audível pelo ser humano está aproximadamente no intervalo [20, 20000] Hz.

No contexto fisiológico, Guyton e Hall (2017) comentam que a sensibilidade máxima da audição humana se encontra entre 1.000 Hz e 4.000 Hz, intervalo que corresponde à região de maior ressonância da membrana basilar e à faixa de frequência da fala humana. Com o envelhecimento, é comum ocorrer perda auditiva progressiva nas frequências mais altas, um processo chamado *presbiacusia*.

As vibrações da membrana basilar estimulam o órgão de Corti, mostrado na Figura 4, estrutura localizada sobre essa membrana composta por células ciliadas internas e externas. A imagem ilustra a organização detalhada do órgão de Corti e destaca sua posição em relação à membrana basilar e à membrana tectória, ajudando a entender como o movimento dos estereocílios faz com que as células sensoriais produzam sinais elétricos, que seguem pelo nervo auditivo até o cérebro.

Figura 4. Órgão de Corti.

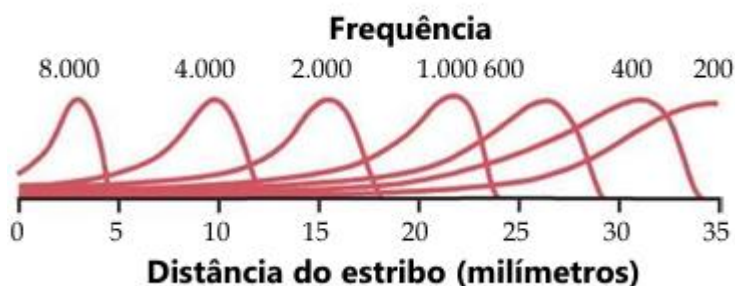


Fonte: Guyton e Hall, 2017.

Guyton e Hall (2017) explicam que cerca de 90% das fibras do nervo auditivo se ligam às células ciliadas internas, que transmitem os sinais ao cérebro. As células externas afinam mecanicamente a resposta da membrana basilar, contribuindo para a sensibilidade e a distinção entre frequências.

As **propriedades elásticas da membrana basilar** são fundamentais para a percepção auditiva. Suas fibras, que se tornam mais longas e menos rígidas da base até o ápice da cóclea, vibram em ressonância com diferentes frequências sonoras. A variação na rigidez e massa ao longo de sua extensão determina a localização da vibração máxima para cada frequência, o que é a base do chamado *Princípio do Lugar*, mecanismo fisiológico principal de discriminação de frequências. A Figura 5 reforça esse conceito e mostra os padrões de amplitude na membrana basilar para sons de frequências entre 200 e 8.000 Hz, destacando os pontos onde a vibração atinge seu pico.

Figura 5. Padrões de amplitude para sons de frequências entre 200 e 8.000 ciclos por segundo, mostrando os pontos de amplitude máxima na membrana basilar para as diferentes frequências.



Fonte: Guyton e Hall, 2017.

O comportamento elástico da membrana basilar será a base para a proposta de modelagem matemática desenvolvida neste trabalho, pois ele traduz diretamente como o som é transformado em um sinal espacial e, posteriormente, em impulsos neurais.

Modelagem Matemática da Vibração da Membrana Basilar

A partir da fundamentação fisiológica apresentada por Guyton e Hall (2017), sabe-se que cada ponto da membrana basilar ressoa com uma faixa específica de frequência. Por possuir características elásticas, a membrana pode ser representada de forma análoga a um sistema massa-mola, no qual cada ponto vibra predominantemente em resposta a uma determinada frequência sonora. Esse comportamento foi previamente modelado nas Preliminares deste trabalho no Exemplo 1, cuja dedução levou à Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem:

$$y''(t) + Ky(t) = 0, \quad K = \frac{k}{m} > 0.$$

No contexto fisiológico da membrana basilar, cada elemento do modelo assume um significado específico:

- $y(t)$: deslocamento vertical da membrana em função do tempo, relativo à posição de equilíbrio;
- m : a massa efetiva associada ao ponto da membrana específico em análise;
- k : a rigidez local da membrana em um ponto específico, que reflete sua elasticidade;
- $K = \frac{k}{m}$: a razão entre rigidez e massa.

Esse tipo de modelagem é coerente com a descrição do funcionamento da membrana basilar e sua organização tonotópica (Guyton e Hall, 2017), onde as variações de k e m ao longo da cóclea implicam em diferentes valores de K . Como discutido por Benson (2003), essa representação permite conectar diretamente propriedades físicas do som à resposta fisiológica do sistema auditivo.

Análise da Solução da EDO para o Modelo Proposto

Conforme estabelecido na seção anterior, a modelagem matemática da membrana basilar conduz à equação diferencial de segunda ordem:

$$y''(t) + Ky(t) = 0, \quad K = \frac{k}{m} > 0.$$

A resolução analítica desta equação já foi apresentada anteriormente na seção de Preliminares, Exemplo 4, resultando em uma solução oscilatória periódica, característica de sistemas que se comportam como osciladores harmônicos simples. Em termos gerais, a solução é dada por:

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{K} t) + C_2 \cos(\sqrt{K} t),$$

em que C_1 e C_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais do movimento, e no caso trabalhado, as condições iniciais do som analisado no ouvido humano.

Delimitação da constante K

Com base no espaço solução dado por (14), obtém-se funções periódicas da forma $y(t) = \cos(\omega t)$ ou $y(t) = \sin(\omega t)$. Essas funções possuem frequência, em Hertz (Hz), dada por $f = \frac{\omega}{2\pi}$. No caso em estudo, $\omega = \sqrt{K}$, logo.

$$f = \frac{\sqrt{K}}{2\pi}. \quad (15)$$

Considerando-se o intervalo de frequências audíveis pelo ouvido humano, compreendido entre 20 Hz e 20.000 Hz (Guyton e Hall, 2017), impõe-se a condição:

$$20 \leq \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \leq 20000.$$

Elevando todos os termos ao quadrado e isolando K , obtém-se o intervalo admissível

$$1,6 \cdot 10^3 \pi^2 \leq K \leq 1,6 \cdot 10^9 \pi^2.$$

Esse resultado indica que diferentes regiões da membrana basilar apresentam valores distintos da constante elástica K , os quais se relacionam diretamente com a frequência das vibrações detectadas. Como discutido por Zill (2007), o conjunto de todas as soluções de uma EDO de segunda ordem define um espaço vetorial que, neste contexto, representa todas as possíveis vibrações da membrana basilar e, conseqüentemente, todos os sons audíveis pelo ser humano. Dessa forma, os sons perceptíveis pelo ser humano podem ser descritos matematicamente a partir desse modelo, com base na vibração da membrana e no tempo necessário para o deslocamento do fluido na cóclea.

Representações de Frequências Sonoras

A equação (12) adotada no modelo e suas soluções obtidas na seção anterior descrevem um comportamento oscilatório, em que a frequência está diretamente relacionada à constante K pela expressão (15).

Dessa forma, é possível associar diferentes valores de K a diferentes frequências e, conseqüentemente, a diferentes faixas de sons audíveis pelo ouvido humano. Quanto maior o valor de K , maior a frequência da vibração e, portanto, mais agudo o som. Valores menores de K representam sons mais graves. Com base nos estudos de psicoacústica e engenharia de áudio de Moore (2012), tem-se os intervalos de frequência que delimitam sons graves, médios e agudos e, a frequência, se relaciona à constante K . Assim pode-se encontrar os intervalos de K para cada caso:

1. **Sons graves:** Sabe-se que os sons graves ressoam a uma frequência de 20 a 250 Hz, calculando os intervalos de K para sons graves tem-se

$$20 \leq \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \leq 250.$$

Multiplicando a expressão por 2π e elevando a expressão ao quadrado, tem-se que:

$$1,6 \cdot 10^3 \pi^2 \leq K \leq 2,5 \cdot 10^5 \pi^2.$$

2. **Sons Médios:** Os sons médios ressoam a uma frequência de 250 à 2.000 Hz

$$250 \leq \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \leq 2000.$$

Multiplicando a expressão por 2π e elevando a expressão ao quadrado, tem-se que

$$2,5 \cdot 10^5 \pi^2 \leq K \leq 1,6 \cdot 10^7 \pi^2.$$

3. **Sons agudos:** Os sons agudos ressoam a uma frequência de 2000 à 20.000 Hz

$$2.000 \leq \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \leq 20.000.$$

Multiplicando a expressão por 2π e elevando a expressão ao quadrado, tem-se que

$$1,6 \cdot 10^7 \pi^2 \leq K \leq 1,6 \cdot 10^9 \pi^2.$$

A Tabela 1 utiliza os valores encontrados e resume os intervalos de frequência os relacionando à constante K :

Tabela 1. Valores de K associados a intervalo de frequências.

Tipo de som	Faixa de frequência (Hz)	Faixa de valores de K
Grave	20 – 250	$1,6 \cdot 10^3 \pi^2$ a $2,5 \cdot 10^5 \pi^2$
Médio	250 – 2000	$2,5 \cdot 10^5 \pi^2$ a $1,6 \cdot 10^7 \pi^2$
Agudo	2000 – 20000	$1,6 \cdot 10^7 \pi^2$ a $1,6 \cdot 10^9 \pi^2$

Fonte: Dos autores, 2025.

Essa associação permite simular, por meio da equação diferencial proposta para o modelo, as vibrações que ocorrem em diferentes regiões da membrana basilar, conectando diretamente a modelagem matemática com a percepção auditiva de sons graves, médios e agudos.

Modelo com Amortecimento: Representando a Presbiacusia

Até o momento, a modelagem adotada descreveu a vibração da membrana basilar por meio de uma equação diferencial de segunda ordem sem amortecimento, ou seja, sem nenhum fator que diminuísse a vibração da membrana com o passar do tempo, como apresentado na equação (4):

$$y''(t) + Ky(t) = 0.$$

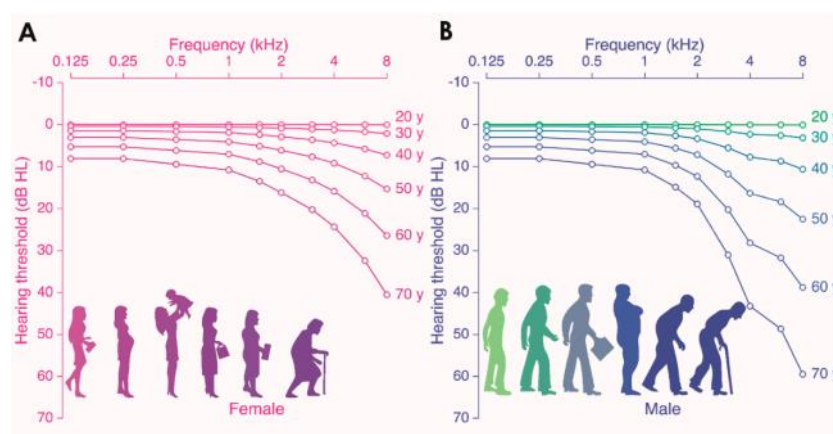
Essa representação pode ser associada a um oscilador harmônico ideal, sem perda de energia. No entanto, como descrito brevemente na seção sobre fisiologia do ouvido humano, com o envelhecimento, observa-se uma deterioração progressiva da resposta auditiva,

principalmente nas altas frequências. Esse fenômeno, denominado **presbiacusia**, está relacionado ao envelhecimento natural do sistema auditivo humano.

A presbiacusia é um processo multifatorial, progressivo e cumulativo, que pode variar de casos leves a situações de perda auditiva significativa. Segundo Gates e Mills (2005), esse tipo de perda é caracterizado por uma redução da sensibilidade auditiva, por dificuldades na compreensão da fala, especialmente em ambientes ruidosos, por um processamento central mais lento das informações sonoras e por prejuízos na localização das fontes sonoras. O avanço dessa condição tende a se manifestar inicialmente nas frequências mais altas e, conforme progride para a faixa de 2 a 4 kHz (frequência média da comunicação humana, como descrita por Guyton e Hall (2017)), passa a comprometer diretamente a compreensão de consoantes não sonoras, como /t/, /p/, /k/, /f/, /s/ e /ch/. Por isso, não é incomum que pessoas com presbiacusia relatem não apenas que “não ouvem”, mas, sobretudo, que “não compreendem” o que está sendo dito, mesmo quando o som é percebido.

De acordo com Guyton e Hall (2017), a presbiacusia está relacionada à degeneração gradual de estruturas da cóclea, especialmente das células ciliadas internas e externas situadas na base coclear, região responsável pela percepção dos sons agudos. Há também um aumento na rigidez da membrana basilar, o que compromete sua capacidade de ressonância. Essas mudanças interferem diretamente na propagação e amplificação das vibrações sonoras ao longo da membrana basilar, justificando, assim, sua modelagem por meio de um sistema com **amortecimento** crescente nas regiões mais afetadas. A Figura 6 mostra o decaimento da percepção auditiva de acordo com a idade, tanto para homens quanto para mulheres. Observa-se que, com o envelhecimento, a sensibilidade auditiva (representada no eixo vertical) decresce mais significativamente nas frequências mais altas (eixo horizontal).

Figura 6. Decaimento da sensibilidade auditiva em diferentes faixas etárias para homens e mulheres.



Fonte: Wang e Puel, 2020.

Embora não haja, até o momento, um tratamento capaz de restaurar integralmente as células sensoriais danificadas, estratégias de reabilitação auditiva, como o uso de aparelhos auditivos, dispositivos de amplificação sonora e implantes cocleares, têm se mostrado eficazes na melhoria da qualidade de vida de pessoas idosas. No entanto, esses recursos ainda são pouco utilizados, em parte devido ao estigma social relacionado à surdez e ao alto custo dos

tratamentos. Ainda segundo Gates e Mills (2005), a subutilização das possibilidades terapêuticas é agravada pela naturalização da perda auditiva como elemento inevitável do envelhecimento, o que leva muitas pessoas a negligenciarem o diagnóstico e a intervenção precoce.

Para representar esse comportamento fisiológico por meio da modelagem matemática, introduz-se o conceito de amortecimento, que descreve a dissipação de energia das vibrações ao longo do tempo, buscando representar, de maneira aproximada, a rigidez coclear e os danos progressivos causados à membrana. A seguir, apresenta-se a modelagem baseada nos trabalhos de Gates e Mills (2005), Guyton e Hall (2017) e na formulação matemática de sistemas amortecidos apresentada por Boyce e DiPrima (2012).

Modelagem da EDO com Amortecimento

A modelagem que pode ser associada a esse fenômeno foi feita na seção das Preliminares (Exemplo 2) e permite representar a vibração da membrana basilar em condições fisiológicas alteradas, como no caso da presbiacusia.

$$y'' + Cy' + Ky = 0.$$

No contexto fisiológico da membrana basilar e, considerando a presbiacusia, cada elemento do modelo assume um significado específico, em que cada termo se relaciona diretamente com a modelagem feita anteriormente na seção **Modelagem Matemática da Vibração da Membrana Basilar**. O que difere os dois modelos é o termo $Cy'(t)$ que expressa matematicamente a perda de energia ao longo do tempo, relacionada à viscosidade do meio ou, nesse caso, à degeneração das estruturas cocleares, conforme descrito por Gates e Mills (2005).

Resolução Analítica da EDO e Classificação do Amortecimento

A resolução analítica dessa EDO foi feita na seção das Preliminares, Exemplo 5, em que foi explorado mais profundamente o caso de **Subamortecimento**, justamente por essa solução representar uma oscilação cuja amplitude decresce ao longo do tempo. Tal comportamento será utilizado neste trabalho para modelar o fenômeno fisiológico da presbiacusia, uma vez que as demais possibilidades, amortecimento crítico e superamortecimento, resultam em oscilações de baixa intensidade ou mesmo ausentes, o que não condiz com o padrão progressivo e gradual da perda auditiva associada ao envelhecimento.

A solução (14) encontrada define esse comportamento em que A_1 e A_2 são constantes reais determinadas pelas condições iniciais do problema e que nesse modelo representarão a amplitude sonora, ou seja a intensidade com que o som é recebido é dada por:

$$y(t) = e^{-\frac{c}{2}t} \left(A_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2} t \right) + A_2 \sin \left(\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2} t \right) \right).$$

Proposta de Modelagem para a Presbiacusia

A equação diferencial com amortecimento (6) apresentada anteriormente

$$\frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{dy}{dt} + Ky(t) = 0$$

permite representar o comportamento fisiológico da membrana basilar em condições alteradas, como no caso da presbiacusia. Para essa modelagem, é necessário definir valores adequados para o coeficiente de amortecimento C , de forma que a equação permaneça no regime subamortecido ($C^2 < 4K$), preservando o caráter oscilatório, porém com amplitude decrescente ao longo do tempo.

Do ponto de vista fisiológico, estudos como os de Wang e Puel (2020) indicam que o envelhecimento promove degenerações estruturais na cóclea, especialmente na base coclear, onde se percebem os sons agudos. Nessa região, observa-se aumento da rigidez da membrana basilar e perda funcional das células ciliadas externas, o que reduz a capacidade amplificadora e compromete a propagação da vibração sonora. Tais alterações podem ser interpretadas, do ponto de vista da modelagem matemática, como um aumento da dissipação de energia, ou seja, um crescimento do coeficiente de amortecimento C .

Para garantir coerência com a modelagem anterior, consideraram-se os valores de K associados às frequências mínimas de cada faixa auditiva, conforme a relação $K = 4\pi^2 f^2$. Assim, os limites superiores para o coeficiente C que preservam o regime subamortecido foram estimados com base na condição $C_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{K}$, ou de forma equivalente, $C_{m\acute{a}x} = 4\pi f$.

- Para $K = 1,6 \cdot 10^3 \pi^2$, $C_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{1,6 \cdot 10^3 \pi^2} = 80\pi$
- Para $K = 2,5 \cdot 10^5 \pi^2$, $C_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{2,5 \cdot 10^5 \pi^2} = 10^3 \pi$
- Para $K = 1,6 \cdot 10^7 \pi^2$, $C_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{1,6 \cdot 10^7 \pi^2} = 8 \cdot 10^3 \pi$

Apesar disso, os testes computacionais demonstraram que valores muito próximos desses limites encontrados resultam em um decaimento muito rápido da resposta, o que compromete a representação das regiões menos afetadas pela presbiacusia. Para contornar isso, foram definidos valores ajustados de C , proporcionalmente menores, em torno de 5% do valor máximo possível, a fim de garantir um decaimento mais realista, respeitando a fisiologia da perda auditiva relacionada à idade. Trabalhos futuros podem incluir o ajuste desses valores através da análise de audiogramas e uma comparação mais detalhada com a realidade, porém o presente trabalho, por seu teor teórico, utilizará os valores ajustados apresentados na Tabela 2:

Tabela 2. Valores ajustados do coeficiente de amortecimento C para simulação da resposta auditiva com presbiacusia.

Região da cóclea	Frequência (Hz)	$K = 4\pi^2 f^2$	Valor ajustado de C
Ápice (sons graves)	20	$1,6 \cdot 10^3 \pi^2$	4π
Região média	250	$2,5 \cdot 10^5 \pi^2$	50π
Base (sons agudos)	2000	$1,6 \cdot 10^7 \pi^2$	400π

Fonte: Dos Autores, 2025.

Estes valores respeitam a condição $C^2 < 4K$ e refletem uma degradação coerente com o grau de comprometimento fisiológico. Nas regiões mais afetadas, como a base da cóclea, o amortecimento é maior, e nas regiões menos afetadas, como o ápice, ele é significativamente menor. Essa abordagem visa equilibrar a resposta fisiológica com a estabilidade e representatividade das simulações numéricas.

Simulações Numéricas

As simulações numéricas foram realizadas com o objetivo de analisar o comportamento do sistema modelado pelas equações diferenciais apresentadas anteriormente, considerando tanto o caso sem amortecimento quanto o caso amortecido, que representa o processo de envelhecimento coclear.

Todas as simulações foram implementadas em **Python**, utilizando o **método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)** para a resolução das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Esse método foi escolhido por garantir boa estabilidade numérica e precisão em sistemas oscilatórios contínuos, conforme descrito por Burden e Faires (2020). As condições iniciais escolhidas foram $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, de modo que o movimento se inicia no ponto de deslocamento máximo da membrana, isto é, em uma posição extrema em relação ao equilíbrio. Nessa situação, a membrana parte de sua amplitude máxima e, como a velocidade inicial é nula, inicia o movimento apenas pela ação da força restauradora elástica. Essa escolha mostra de maneira mais clara o comportamento oscilatório do sistema, destacando a transição natural entre energia potencial elástica e energia cinética. O intervalo de tempo considerado foi de 0 a 0,05 segundos, com passo $h = 10^{-5}$, valor pequeno o suficiente para capturar as variações rápidas de amplitude típicas dos movimentos vibratórios.

Os valores dos parâmetros **K** (rigidez por unidade de massa) e **C** (coeficiente de amortecimento) foram ajustados conforme a faixa de frequência a ser simulada, levando em conta as propriedades fisiológicas da cóclea descritas por Guyton e Hall (2017) e seguindo a Tabela 2 como referência para cada simulação, de modo que os valores de K e C correspondem aos apresentados na tabela. Assim, foram definidos três conjuntos de simulações:

- **Sons graves (20–250 Hz):** menor valor de K e C, representando a região apical da cóclea, onde as fibras são mais longas e flexíveis.
- **Sons médios (250–2000 Hz):** valores intermediários de K e C, correspondendo à região média da membrana basilar.
- **Sons agudos (2000–20000 Hz):** valores elevados de K e C, simulando a base da cóclea, região mais rígida e suscetível à degeneração conforme descrito por Wang e Puel (2020).

Cada simulação foi executada em duas condições: **sem amortecimento ($C = 0$)** e **com amortecimento ($C > 0$)**, permitindo comparar o comportamento oscilatório da membrana em um ouvido fisiologicamente normal e em um ouvido com presbiacusia.

As soluções numéricas foram armazenadas e posteriormente representadas graficamente, mostrando o deslocamento $y(t)$ em função do tempo para cada faixa de frequência e configuração de parâmetros. Esses gráficos serviram de base para analisar o efeito do amortecimento sobre a amplitude e a duração das oscilações, relacionando o modelo matemático às propriedades fisiológicas da audição humana. Os valores da amplitude apresentam uma oscilação de sinal, o que não indica uma amplitude negativa, e sim o deslocamento da partícula (ou ponto do sistema) em torno de sua posição de equilíbrio. Assim, quando o gráfico mostra valores **positivos e negativos**, isso indica que o movimento oscila alternando direções, ora acima, ora abaixo do ponto de equilíbrio.

Solução na faixa de som grave

O gráfico mostrado a seguir na Figura 7, mostra uma comparação entre duas simulações, uma feita em relação ao modelo com amortecimento (pontilhado) e a outra em relação ao modelo sem amortecimento, ambas em relação à resposta auditiva do ouvido humano sob efeito de um som grave. As soluções simuladas para essa resposta foram as soluções para as seguintes equações:

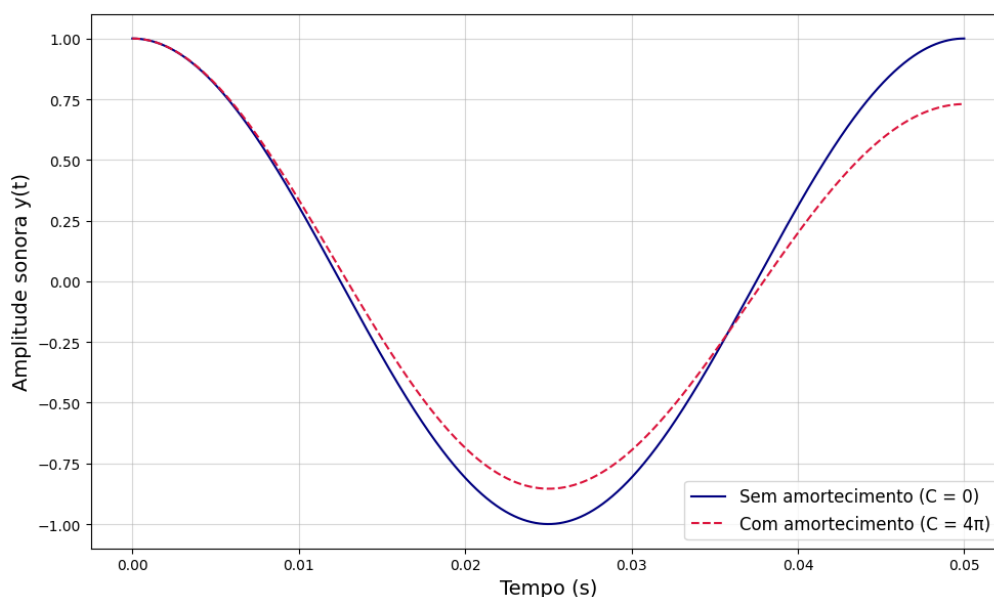
Equação sem amortecimento:

$$y''(t) + 1,6 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot y(t) = 0$$

Equação com amortecimento:

$$y''(t) + 4\pi y'(t) + 1,6 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 y(t) = 0$$

Figura 7. Sons graves — comparação entre modelos com e sem amortecimento.



Fonte: Dos autores, 2025.

Nas simulações referentes às frequências graves, observa-se que o comportamento da solução amortecida apresenta pouca diferença em relação à solução sem amortecimento, no

intervalo de tempo analisado. As oscilações mantêm amplitudes aproximadamente constantes e a mudança é sutil, o que indica uma menor dissipação de energia no sistema amortecido em relação ao sistema sem amortecimento.

Do ponto de vista do modelo matemático, essa característica está associada aos menores valores dos parâmetros K e C . Como o termo K representa a razão entre a rigidez e a massa do sistema, valores baixos de K fazem com que a frequência de oscilação seja menor, como observado nos cálculos feitos na seção Representações de Frequências Sonoras. Já o termo C , responsável pelo amortecimento, quando pequeno, exerce influência menor sobre o decaimento da amplitude. Portanto, as soluções da equação diferencial permanecem oscilatórias por um tempo prolongado, com uma leve redução da amplitude ao longo do tempo, como descrito anteriormente através de um sistema subamortecido.

Essa resposta fisiologicamente está de acordo com Guyton e Hall (2017), pois as regiões responsáveis pela detecção de sons graves localizam-se no ápice coclear, onde as fibras da membrana basilar são mais longas e menos rígidas. Essa menor rigidez faz com que as ondas sonoras de baixa frequência se propaguem por uma distância maior, vibrando de forma mais ampla e lenta, como pode ser observado no gráfico da Figura 7. Além disso, estudos sobre presbiacusia (Wang e Puel, 2020) indicam que o processo de degeneração coclear atinge principalmente a base da cóclea, região associada aos sons agudos. As partes do ápice, ligadas às frequências graves, permanecem mais preservadas com o envelhecimento. Essa característica fisiológica pode ser associada ao modelo observando a semelhança das simulações de um ouvido normal e um ouvido afetado pela presbiacusia. O aumento do termo C , que simboliza a perda de energia vibratória por rigidez do tecido, não produz efeito significativo nas faixas de baixa frequência.

Solução na faixa de som médio

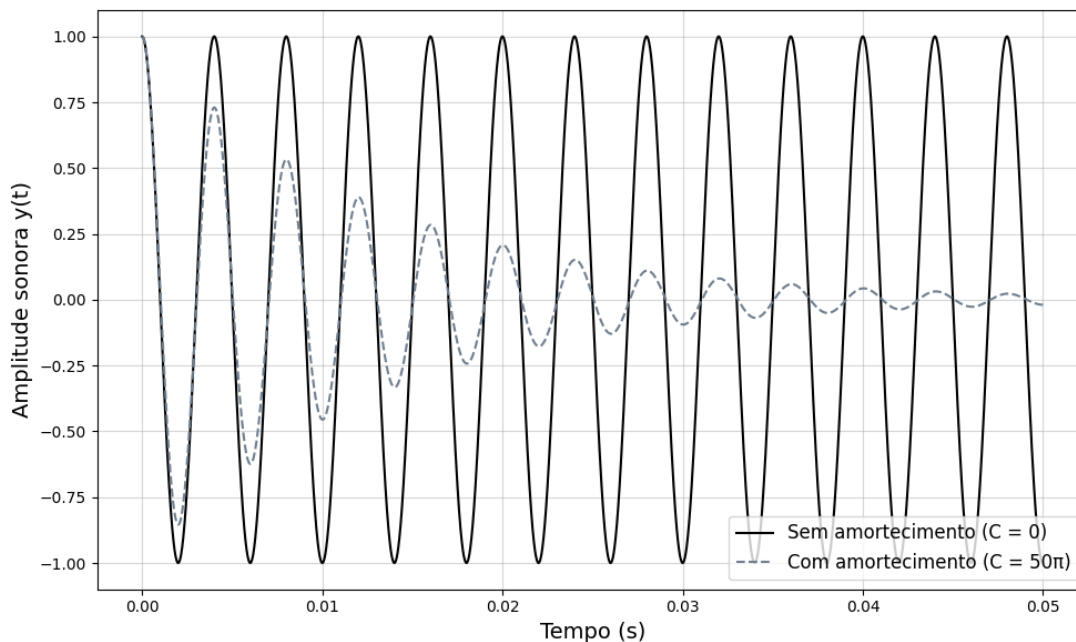
O gráfico mostrado a seguir, na Figura 8, mostra uma comparação entre duas simulações, uma feita em relação ao modelo com amortecimento (pontilhado) e a outra em relação ao modelo sem amortecimento, ambas em relação a resposta obtida no modelo pelo ouvido humano, em relação a sons médios. As soluções simuladas para essa resposta foram as soluções para as seguintes equações:

Equação sem amortecimento:

$$y''(t) + 2,5 \cdot 10^5 \cdot \pi^2 \cdot y(t) = 0$$

Equação com amortecimento:

$$y''(t) + 50\pi y'(t) + 2,5 \cdot 10^5 \cdot \pi^2 y(t) = 0$$

Figura 8. Sons médios — comparação entre modelos com e sem amortecimento.

Fonte: Dos Autores, 2025.

Nas simulações referentes às frequências médias, observa-se que o comportamento da solução amortecida apresenta uma diferença significativa em relação à solução sem amortecimento, no intervalo de tempo analisado. As oscilações mantêm amplitudes aproximadamente constantes no início, mas ao longo do tempo vão decaindo de maneira rápida até quase não apresentarem amplitude, o que indica uma perda grande de energia no sistema amortecido em relação ao sistema sem amortecimento.

Analisando o sistema pelas equações, nota-se que ao aumentarmos o valor do termo K , obtemos uma frequência de oscilação maior. E com o aumento do termo de amortecimento C , é possível perceber que a queda da amplitude no sistema com amortecimento é muito mais notável e significativa. As soluções da equação ainda apresentam comportamento oscilatório no intervalo de tempo observado, porém, em comparação com o sistema feito para sons graves, o decaimento da amplitude do sistema amortecido é muito mais elevado, levando a uma amplitude quase nula ao final da simulação.

No aspecto fisiológico, esse padrão está de acordo com o funcionamento da região média da membrana basilar, onde as fibras apresentam comprimento e rigidez intermediários. Conforme descrito por Guyton e Hall (2017), essa região da cóclea é responsável pela captação das frequências médias, as quais exigem um equilíbrio entre flexibilidade e rigidez para permitir boa resposta vibratória. Assim, as ondas sonoras propagam-se por uma distância moderada antes de se dissiparem, o que justifica a redução gradual observada nas simulações com amortecimento.

Observando as simulações em relação à presbiacusia, as frequências médias começam a ser mais afetadas à medida que o envelhecimento avança. De acordo com Wang e Puel (2020),

embora a degeneração inicial se concentre na base coclear (sons agudos), o dano pode se estender para regiões médias, onde ocorre o comprometimento parcial das células ciliadas. Isso é mostrado no comportamento do modelo: a introdução do amortecimento representa o efeito fisiológico da perda parcial de elasticidade e eficiência vibratória, o que gera uma resposta mais amortecida, porém ainda periódica e preservada em parte, apesar da queda considerável da amplitude do sistema amortecido.

Solução na faixa de som agudo

O gráfico mostrado a seguir na Figura 9, faz uma comparação entre duas simulações, uma feita em relação ao modelo com amortecimento (pontilhado) e a outra em relação ao modelo sem amortecimento, ambas em relação à resposta auditiva do ouvido humano sob efeito de um som agudo. As soluções simuladas para essa resposta foram as soluções para as seguintes equações:

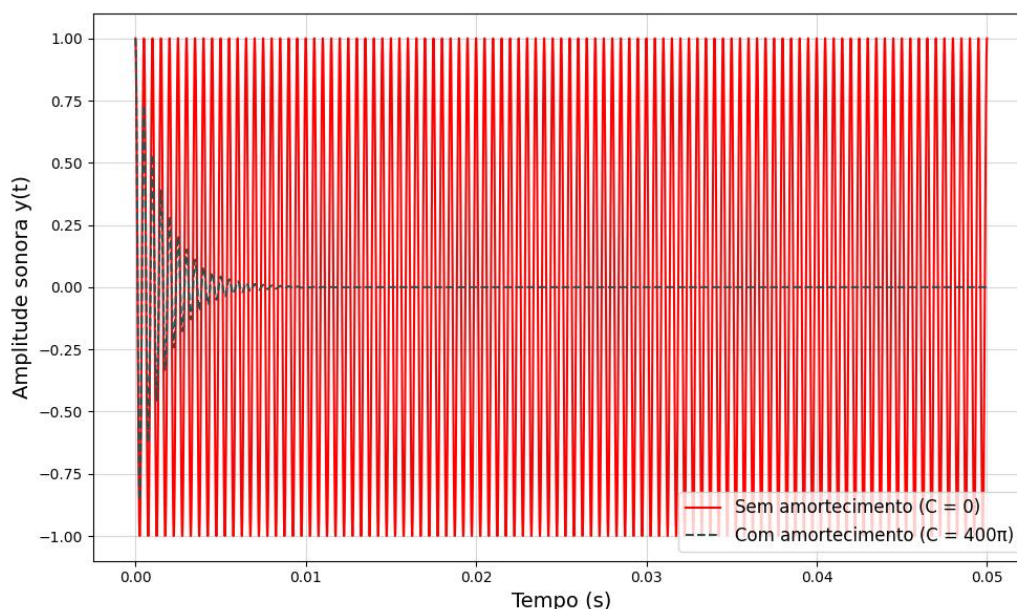
Equação sem amortecimento:

$$y''(t) + 1,6 \cdot 10^7 \cdot \pi^2 \cdot y(t) = 0$$

Equação com amortecimento:

$$y''(t) + 400\pi y'(t) + 1,6 \cdot 10^7 \cdot \pi^2 y(t) = 0$$

Figura 9. Sons Agudos — comparação entre modelos com e sem amortecimento.



Fonte: Dos autores, 2025.

Nas simulações referentes às frequências agudas, observa-se que o comportamento da solução amortecida apresenta uma diferença muito grande em relação à solução sem amortecimento, no intervalo de tempo analisado. As oscilações do modelo amortecido já iniciam com uma grande variação de amplitude e continuam se degradando até chegar a uma amplitude nula, aproximadamente no instante de $t = 0,01$ s, o que mostra uma intensa perda de energia no sistema amortecido em relação ao sistema sem amortecimento.

Observando as equações do modelo para sons agudos, temos que o valor mais elevado de K gera um grande impacto na frequência, como já havia sido observado em seções anteriores. Nota-se também que conforme o crescimento da constante C , temos uma taxa de variação da amplitude muito grande ao longo do tempo, e no sistema em questão ela se anula muito rapidamente. No início ambas as soluções possuem um comportamento oscilatório, porém ao longo do tempo a solução com amortecimento perde totalmente esse comportamento e se anula, em comparação com os outros dois sistemas (sons graves e médios), nota-se uma grande queda da amplitude logo no início do sistema.

Fisiologicamente, pode-se observar os motivos por trás desse fenômeno direto na estrutura da cóclea. Conforme descrito por Guyton e Hall (2017), as regiões da base da membrana basilar são curtas e rígidas, sendo que elas são as responsáveis pela detecção dos sons agudos. Essa rigidez faz com que as ondas de alta frequência vibrem com intensidade apenas em um pequeno trecho da base, dissipando-se mais rapidamente sob o efeito de amortecimento. Em pessoas com presbiacusia, conforme apontado por Wang e Puel (2020), é essa região basal que sofre a maior degeneração, com perda de células ciliadas externas e redução da sensibilidade coclear.

Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho teve como objetivo a construção e análise de modelos capazes de representar a percepção auditiva do ouvido humano com base na membrana basilar, interpretando-a como um oscilador harmônico e, diferentemente dos modelos que envolvem membranas e fazem uso de EDPs, utilizando apenas EDOs, com menor sofisticação matemática. A principal contribuição está na proposição de um modelo matemático mais acessível, cujas variações estudadas numericamente foram capazes de descrever, com coerência, características fisiológicas da audição humana, tanto em uma audição normal quanto sob efeito da presbiacusia, respeitando os aspectos descritos por Guyton e Hall (2017) e por Wang e Puel (2020). As simulações permitiram comparar os cenários e estabelecer uma conexão teórica entre a modelagem matemática e a fisiologia apresentada na literatura.

Como limitações, destaca-se o fato de o estudo permanecer no âmbito teórico, sem validação por meio de dados experimentais, como audiogramas reais, além das simplificações assumidas na representação da membrana basilar. Como possibilidades futuras, aponta-se a realização de análises comparativas com dados reais e a implementação de uma série de Fourier por meio da combinação linear das soluções das EDOs propostas, permitindo aprofundar a relação com a análise espectral do som e aproximar o modelo de situações mais próximas da realidade.

De modo geral, os resultados indicam que a modelagem proposta oferece um caminho para compreender o comportamento físico da membrana basilar e as alterações auditivas associadas ao envelhecimento, abrindo espaço para investigações para cenários mais próximos da realidade humana.

Referências

Benson, D. C. (2003). *Music: a mathematical offering*. Cambridge: Cambridge University Press.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Equações diferenciais e problemas de valores de contorno* (9ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2020). *Análise numérica* (10ª ed.). Boston: Cengage Learning.

Gates, G. A., & Mills, J. H. (2005). Presbycusis. *The Lancet*, 366(9491), 1111–1120. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(05\)67423-5](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(05)67423-5)

Guyton, A. C., & Hall, J. E. (2005). *Tratado de fisiologia médica* (11ª ed.). Rio de Janeiro: Elsevier.

Guyton, A. C., & Hall, J. E. (2017). *Tratado de fisiologia médica* (13ª ed.). Rio de Janeiro: Elsevier.

Sotomayor, J. (1979). Lições de equações diferenciais ordinárias. Rio de Janeiro: IMPA.

Moore, B. C. J. (2012). *An introduction to the psychology of hearing* (6ª ed.). Leiden: Brill.

Wang, J., & Puel, J.-L. (2020). Presbycusis: An update on cochlear mechanisms and therapies. *Journal of Clinical Medicine*, 9(1), 218. <https://doi.org/10.3390/jcm9010218>

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2007). *Equações diferenciais* (Vol. 1). Cengage Learning.

Apêndice

Este Apêndice reúne demonstrações complementares apresentadas ao longo do texto, bem como exemplos ilustrativos relacionados às soluções das equações diferenciais estudadas. Inclui-se também a base dos códigos computacionais utilizados nas simulações numéricas comparativas entre os casos com e sem amortecimento.

A.1 Demonstração Princípio da sobreposição:

Apresenta-se a seguir a demonstração do princípio da sobreposição utilizado na construção do espaço solução da EDO linear homogênea discutida na seção das Preliminares.

Como y_1 e y_2 são soluções, temos:

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \quad e \quad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0.$$

Considere $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Então,

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad y'(t) = c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t), \quad y''(t) = c_1y_1''(t) + c_2y_2''(t).$$

Substituindo em :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(c_1y_1'' + c_2y_2'') + b(c_1y_1' + c_2y_2') + c(c_1y_1 + c_2y_2), \\ &= c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $y(t)$ também é solução.

A.2 Demonstração Solução na forma exponencial:

Demonstra-se a forma exponencial das soluções associadas à equação característica introduzida anteriormente na seção das Preliminares.

Assuma $y(t) = ke^{r_1 t}$. Calculando as derivadas:

$$y'(t) = kr_1 e^{r_1 t}, \quad y''(t) = kr_1^2 e^{r_1 t}.$$

Substituindo em (1):

$$ay'' + by' + cy = akr_1^2 e^{r_1 t} + bkr_1 e^{r_1 t} + cke^{r_1 t} = ke^{r_1 t}(ar_1^2 + br_1 + c).$$

Como r_1 é raiz da equação característica, temos $ar_1^2 + br_1 + c = 0$, logo:

$$ke^{r_1 t} \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $y(t) = ke^{r_1 t}$ é solução.

A.3 Exemplo Wronskiano:

Apresenta-se a seguir um exemplo do uso do Wronskiano para determinar a dependência linear de soluções de uma EDO.

Considere $y_1(t) = e^{2t}$ e $y_2(t) = e^{3t}$, soluções associadas à equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$. O Wronskiano é dado por:

$$W(y_1, y_2)(t) = e^{2t} \cdot 3e^{3t} - e^{3t} \cdot 2e^{2t} = e^{5t}.$$

Como $e^{5t} \neq 0$ para todo $t \in R$, conclui-se que y_1 e y_2 são linearmente independentes e formam uma base para o espaço solução.

A.4 Códigos computacionais:

O código utilizado para a implementação do método de Runge–Kutta de quarta ordem, referente à seção de Simulações numéricas, está disponível em um repositório no [Google Colab](#).