



## **Estudo e projeção do crescimento populacional do Brasil através dos modelos matemáticos de Thomas Malthus e Pierre François Verhulst**

**Study and projection of Brazil's population growth through the mathematical models of Thomas Malthus and Pierre François Verhulst**

**Gabriel Conceição Normandia**

Graduando em Engenharia Mecânica  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP  
<https://orcid.org/0009-0001-3957-5704>  
gabriel.normandia@aluno.ifsp.edu.br

**Marco Aurelio Granero**

Doutor em Engenharia Elétrica  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP  
<https://orcid.org/0000-0002-1993-1898>  
granero@ifsp.edu.br

**EDIÇÃO ESPECIAL - X ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO DO IFSP - CAMPUS SÃO PAULO (EICPOG)**

### **Resumo**

Este trabalho, utilizando como base de dados os valores fornecidos pelo instituto brasileiro de geografia e estatística - IBGE, analisou os modelos de Verhulst e Malthus para descrever o crescimento populacional. A base de dados utilizada fornece dados relativos aos censos de 1900 até 2020 da população brasileira. A metodologia utilizada para os modelos consiste em estimar as populações com os modelos em função dos anos em que os censos foram feitos e, após isso, verificar a discrepância entre os valores. A fim de enriquecer a análise, os modelos também foram utilizados para estimar a população do Brasil nos anos de 2047 e 2060. Como resultados principais, utilizando a projeção feita com o modelo de Malthus, percebeu-se que, a partir dos anos 2000, o modelo apresentou diferenças acima de 30% do valor medido pelo IBGE e, nos períodos anteriores aos anos 2000, verificou-se diferenças menores do que 9%. Os resultados utilizando o modelo de Verhulst apresentaram diferenças menores do 8% a partir do ano de 1980, com relação aos valores fornecidos pelo IBGE.

**Palavras-chave:** Thomas Malthus, Pierre François Verhulst, crescimento populacional, modelagem matemática.

### **Abstract**

Using data from the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE), this study constructed and analyzed the Verhulst and Malthus models to describe Brazil's population growth. The database provided data from the census of Brazil from 1900 to 2020. This data was used to build the model, and the results were compared with the census data to check for discrepancies between the values. To enhance the analysis, the models were also used to estimate Brazil's population in the years 2047 and 2060. The main results, using the projection made with the Malthusian model, showed a difference of more than 30% compared to the value measured by the IBGE, after the years 2000, whereas in the years prior to 2000, differences of less than 9% were observed. The results obtained with the Verhulst model showed differences of less than 8% from 1980 onwards, compared to the values provided by the IBGE.

**Keywords:** Thomas Malthus, Pierre François Verhulst, populational growth, mathematical modeling.

## Introdução

No mundo, diferentes situações exigem um estudo teórico e previsões, para esse fim, pode-se utilizar a modelagem matemática, que segundo Bassanezi (2002) é a habilidade transpor problemas reais em problemas matemáticos e, desse ponto, resolvê-los e interpretar suas soluções na linguagem do mundo real. Entretanto essa não é uma tarefa trivial, uma vez que os fenômenos estudados apresentam complexidades diversas em seu estudo, tornando sua representação matemática proporcionalmente difícil, por esse motivo, há a necessidade de se criar um modelo simplificado, em geral mais simples, mas que ainda represente o problema original. Nessa tarefa, as equações diferenciais possuem uma importância singular, pois, segundo Leighton (1970), são inúmeros os sistemas que podem ser representados por elas.

Com essas ideias em mente, o modelo exponencial de Malthus e o modelo logístico de Verhulst para o crescimento populacional apresentam-se como opções ao problema proposto: modelar o crescimento da população do Brasil com os dados do IBGE. Segundo Bassanezi (2002), a ideia de tentar prever o crescimento populacional com ferramentas matemáticas começou com o economista francês Thomas Robert Malthus.

[..]o que se convencionou chamar de modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante (progressão geométrica ou crescimento exponencial), e desta forma, a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição. Assim, o modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizada, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. (Bassanezi, 2002, p.327.).

Por outro lado, afirma Bassanezi (2002), o Modelo de Verhulst propõe que um meio ambiente possui um limite de indivíduos suportado e que a população tende a crescer até esse limite, ou seja, ela tende a estabilizar-se. Para formalizar isso matematicamente, o modelo logístico acrescenta um termo limitador do crescimento, propondo que a curva de crescimento da população apresenta uma assíntota horizontal.

## Referencial Teórico

Antes de introduzir o modelo de Malthus, é preciso apresentar dois postulados estabelecidos por ele:

1. "O alimento é necessário à subsistência do homem";
2. "A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente". (Bassanezi, 2002, p.327.)

Diante desses dois postulados, segundo Bassanezi (2002), o que ficou definido como modelo de Malthus afirma que o crescimento populacional é proporcional ao tamanho da população. Matematicamente, segundo o mesmo autor, isso fica caracterizado pela equação (1)

$$\frac{dP}{dt} = r P(t), \quad (1)$$

cuja solução é dada pela equação (2):

$$P(t) = e^{r \cdot t} \cdot P(0) \quad (2)$$

onde  $P(0)$  é a população inicial e  $r$  é uma constante que representa a taxa de crescimento ou decréscimo da população.

Bassanezi (2002) afirma que o modelo de Verhulst, também chamado de modelo logístico, é semelhante ao modelo de Malthus, ele também afirma que a taxa de crescimento populacional depende do tamanho da população. Entretanto o modelo logístico acrescenta um fator limitador na taxa de crescimento que também está atrelado ao tamanho da população, matematicamente, o modelo logístico fica definido pela equação (3):

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \quad (3)$$

cuja solução é dada pela equação (4):

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K}{P(0)} - 1 \right) e^{-r \cdot t}} \quad (4)$$

onde  $K$  é a capacidade suporte do meio, ou seja, o máximo de indivíduos que o meio suporta e  $r$  é a mesma taxa do modelo de Malthus.

### Metodologia

A metodologia empregada consiste em ajustar os modelos apresentados a população brasileira, para isso utilizou-se o método apresentado por Boeno (2018), esse processo consiste em linearizar os modelos e por ajustes com o método dos mínimos quadrados (MMQ) determinar os parâmetros  $r$  e  $K$  adequados para os valores de população fornecidos pelo IBGE.

### Resultados

Após aplicar o processo de linearização, encontrou-se os modelos adaptados para a população brasileira e eles são as equações (5) e (6).

$$P(t) = 17894429,12 \times e^{0,0228 \cdot t} \quad (5)$$

$$P(t) = \frac{233,2 \times 10^6}{1 + \left( \frac{233,2 \times 10^6}{17488434} - 1 \right) e^{0,0851 \cdot t}} \quad (6)$$

Através das equações (5) e (6), foram determinadas as populações ajustadas pelos modelos, cujos resultados encontram-se na Tabela 1, juntamente com a diferença absoluta entre as populações e o erro percentual, é necessário salientar que os valores do IBGE nos anos de 2020, 2047 e 2060 são estimativas.

Além disso, a Figura 1 apresenta os resultados dos modelos ajustados e os dados obtidos e estimados pelo IBGE para a população brasileira no período entre 1900 e 2060.

**Tabela 1:**

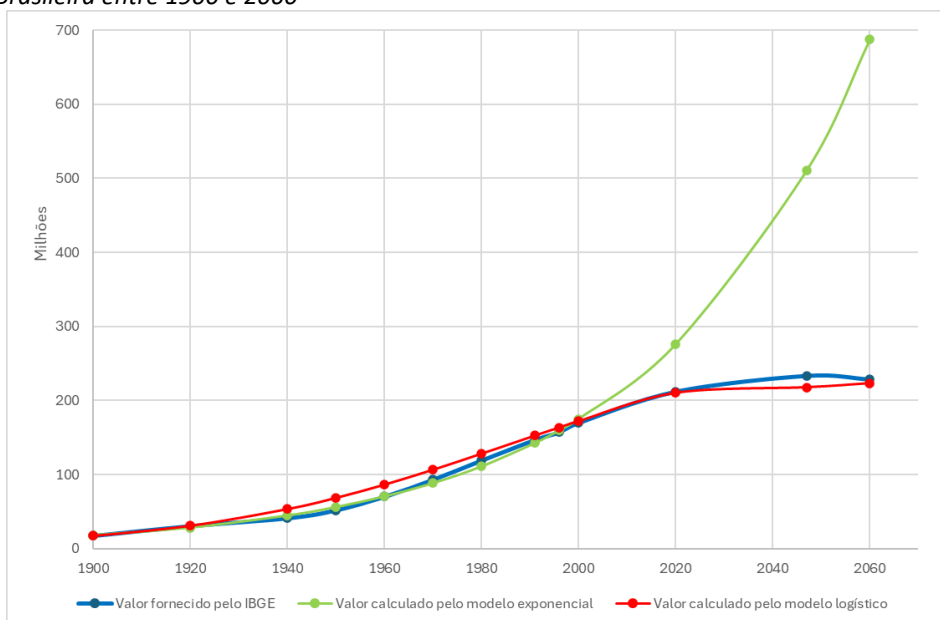
Valores para comparação dos modelos exponencial e logístico e dados do IBGE

Ano	Dados do IBGE	Modelo exponencial	Diferença	% de erro	Modelo logístico	Diferença	% de erro
1900	17.438.434	17.894.429	-455.995	2,61%	17.438.434	0	0,00%
1920	30.635.605	28.232.941	2.402.663	7,84%	31.210.767	575.162	1,88%
1940	41.236.315	44.544.533	-3.308.218	8,02%	53.636.728	12.400.413	30,07%
1950	51.944.397	55.951.734	-4.007.337	7,71%	68.781.513	16.837.116	32,41%
1960	70.191.370	70.280.153	-88.783	0,13%	86.566.064	16.374.694	23,33%
1970	93.139.037	88.277.869	4.861.168	5,22%	106.625.948	13.486.911	14,48%
1980	119.002.706	110.884.535	8.118.170	6,82%	128.249.724	9.247.018	7,77%
1991	146.825.475	142.492.510	4.332.964	2,95%	152.659.098	5.833.623	3,97%
1996	157.070.163	159.698.784	-2.628.621	1,67%	163.588.361	6.518.198	4,15%
2000	169.779.170	174.948.114	-5.168.944	3,04%	172.129.200	2.350.030	1,38%
2020	211.800.000	276.024.448	-64.224.448	30,32%	210.203.684	-1.596.315	-0,75%
2047	233.200.000	510.856.864	-277.656.864	-119,06%	217.727.827	-15.472.172	-6,63%
2060	228.300.000	687.106.596	-458.806.596	-200,97%	223.152.222	-5.147.777	-2,25%

Fonte: Os autores e <https://brasil500anos.ibge.gov.br/estatisticas-do-povoamento/evolucao-da-populacao-brasileira.html>

**Figura 1 –**

População Brasileira entre 1900 e 2060



Nota. Fonte: Autores (Valores obtidos na Tabela 1).

## Discussão

Observando a Figura 1, é possível perceber que o modelo de Malthus (ou exponencial) apresenta valores mais próximos aos dados do IBGE entre os anos de 1900 até 2000, após este período o modelo de Verhulst (ou logístico) apresenta melhores resultados.

Observando os dados fornecidos pelo IBGE observa-se que no ano de 2000 houve uma diminuição na taxa de crescimento da população. Esta diminuição na taxa de crescimento é conhecida, matematicamente, como ponto de inflexão, ponto no qual uma função muda sua concavidade. Com isto, evidencia-se que o modelo exponencial é mais adequado à modelagem em períodos que antecedem pontos de inflexão e, modelos logísticos adequam-se melhor a períodos após pontos de inflexão.

Utilizando o modelo de Malthus para avaliar a projeção para a população no ano de 2020 observa-se uma estimativa 30% maior do que o medido pelo IBGE. Considerando as projeções do IBGE e do modelo exponencial nos anos de 2047 e 2060, verificam-se valores ainda mais discrepantes de modo que a projeção do modelo exponencial ficou muito maior do que a proposta pelo IBGE.

Tomando como referência a projeção da população para o ano de 2020 segundo o modelo de Verhulst, observa-se uma diferença em torno de 0,75% em relação aos dados fornecidos pelo IBGE. Avaliando esta projeção para os anos de 2047 e 2060, nota-se uma diferença de 6,63% e 2,25% entre o modelo e a previsão do IBGE, respectivamente. Entretanto é preciso observar que o modelo logístico também apresentou grande disparidade dos dados fornecidos pelo IBGE nos anos de 1940 até 1970 e acreditamos que isso esteja atrelado a alguma anomalia no crescimento populacional que fez com que a população crescesse mais rapidamente.

## Considerações finais

Os resultados apresentados evidenciaram que o modelo exponencial pode ser utilizado para descrever a população quando esta não está próxima da capacidade suportada pelo meio, em geral em intervalos anteriores ao ponto de inflexão da grandeza estudada, pois questões relacionadas do meio ainda não possuem grande impacto no crescimento populacional, entretanto o modelo logístico mostrou-se mais eficiente para projeções a longo prazo e/ou quando a população encontra-se próximo ao máximo suportado pelo ambiente, pois, nesses casos, há um maior impacto de questões do ambiente.

## Referências

- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática*. Editora Contexto. [https://www.researchgate.net/profile/Rodney-Bassanezi/publication/256007243\\_Ensino\\_-\\_aprendizagem\\_com\\_Modelagem\\_matematica/links/0046352163725accb1000000/Ensino-aprendizagem-com-Modelagem-matematica.pdf?tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19](https://www.researchgate.net/profile/Rodney-Bassanezi/publication/256007243_Ensino_-_aprendizagem_com_Modelagem_matematica/links/0046352163725accb1000000/Ensino-aprendizagem-com-Modelagem-matematica.pdf?tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19).
- Boeno, M. C. F. (2018). *Modelagem matemática e a arte da fabricação de pães artesanais*. São Paulo. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo]. [https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/168416/mod\\_resource/content/0/Michele%20Cristiane%20Fagundes%20Boeno.pdf](https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/168416/mod_resource/content/0/Michele%20Cristiane%20Fagundes%20Boeno.pdf)
- Leighton, W. (1970). *Equações diferenciais ordinárias*. Livros técnicos e científicos Ltda.