



**ANÁLISE ESTRUTURAL DE LAJES RETANGULARES SOB CARGA UNIFORMEMENTE
DISTRIBUÍDA VIA TABELAS: MÓDULO DE PROGRAMA
ANALYSIS OF RECTANGULAR SLABS UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD VIA TABLES:
PROGRAM MODULE**

Mateus Marques Padilha

Graduando em Engenharia Civil
IFSP/Campus Votuporanga
mateusmarquespadilha2018@gmail.com

Gustavo Cabrelli Nirschl

Mestre em Engenharia de Estruturas/USP
IFSP/Campus Votuporanga
nirschl@ifsp.edu.br

ARTIGO INFO. Recebido: 18.08.2025 Aprovado: 03.09.2025 Disponibilizado: 20.09.2025

RESUMO

No âmbito da Engenharia Civil, diversos programas computacionais estão disponíveis, porém muitos apresentam apenas os resultados finais, dificultando a compreensão completa do processo. Diante dessa limitação, este artigo aborda o desenvolvimento de um módulo incorporado a um programa já existente, módulo este direcionado à análise estrutural de lajes retangulares sob carga distribuída, programado com o uso de linguagens de programação web HTML e JavaScript. O objetivo é facilitar a visualização e o cálculo dos esforços estruturais máximos por meio de métodos tabelados, permitindo ao usuário configurar as dimensões da laje, suas condições de vinculação e cargas, além de calcular os momentos flettores positivos e negativos máximos nas direções x e y . A metodologia adotada baseia-se nos métodos tabelados de Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970), cujos resultados apresentam-se em uma interface gráfica e são exportados em relatórios detalhados no formato PDF. Esses relatórios constam todas as etapas de cálculo, acompanhados pelos parâmetros e metodologias empregados, garantindo a apresentação dos dados.

Palavras-chave: Análise estrutural; Lajes retangulares; Programa *on-line*; Métodos tabelados; Cálculo de esforços.

ABSTRACT

In the field of Civil Engineering, various computational programs are available; however, many provide only final results, making it difficult to fully understand the process. To address this limitation, this study presents the development of a software module for the structural analysis of rectangular slabs under distributed load, programming using web programming languages such as HTML and JavaScript. The objective is to facilitate the visualization and calculation of maximum structural forces through tabulated methods, allowing users to configure the slab dimensions, boundary conditions, and loads, as well as compute the maximum positive and negative bending moments in the x and y directions. The adopted methodology is based on the tabulated methods of Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967), and Rusch (1970), whose results are displayed in an intuitive graphical interface and exported in detailed reports in PDF format. These reports include all calculation steps, along with the applied parameters and methodologies, ensuring data presentation.

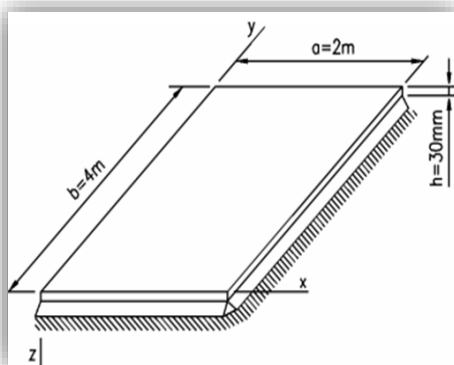
Keywords: Structural analysis; Rectangular slabs; Online Program; Tabulated methods; Force calculation.

Introdução

As lajes retangulares são elementos estruturais utilizados em edificações, servindo como elementos de distribuição de cargas para vigas e pilares. De acordo com Soares (2004), esses elementos trabalham predominantemente à flexão, podendo apresentar esforços em duas direções ortogonais, diferentemente das vigas, que operam em uma única direção. Além disso, a espessura da placa deve ser pequena em relação às suas outras dimensões, as deflexões devem ser reduzidas em relação à espessura e as tensões normais à superfície

média podem ser desprezadas. Na figura 1 é apresentada uma representação de laje retangular simplesmente apoiada.

Figura 1 - Laje retangular simplesmente apoiada



Fonte: Soares (2004).

Historicamente, o cálculo estrutural dessas lajes evoluiu com o desenvolvimento da Teoria das Placas, baseada na teoria da elasticidade, conforme descrito por Lagrange em 1811 (Bastos, 2023). No contexto da engenharia estrutural, diversos métodos foram propostos para facilitar a determinação dos esforços e deslocamentos nesses elementos, resultando na criação de tabelas como as de Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970), amplamente utilizadas para simplificar o cálculo de esforços de lajes retangulares.

Segundo Longo (2022), algumas dessas tabelas incluem informações sobre momentos de torção, esforços cortantes, reações de apoio e forças concentradas nos cantos, enquanto outras apresentam apenas momentos fletores. Em alguns casos, os momentos fletores referem-se apenas ao centro da placa, sem considerar que o valor máximo pode ocorrer em outro ponto da estrutura. Ainda conforme Longo (2022), o uso dessas tabelas é mais frequente para lajes isoladas com condições de apoio simples, engastadas ou livres. Para painéis contínuos apoiados em vigas, a aplicação das tabelas exige correções nos esforços devido à continuidade da estrutura. Nessas situações, a flexibilidade das vigas é frequentemente desconsiderada, o que pode resultar em variações significativas nos valores dos esforços e deslocamentos verticais.

Apesar da existência de *softwares* de análise estrutural, muitos, especialmente os gratuitos, apresentam apenas os resultados, sem detalhar as etapas intermediárias do cálculo, o que dificulta a compreensão do processo por parte de estudantes e profissionais. Como exemplo, citam-se o Ftool (2025) e o LESM (2022), os quais apresentam de forma gráfica os diagramas de esforços e deslocamentos, mas não explicita as equações e métodos utilizados no processamento.

Dessa forma, o presente artigo mostra um módulo computacional para a análise estrutural de lajes retangulares sob carregamento uniformemente distribuído, incorporando os métodos tabelados de Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970). O módulo visa a calcular os momentos fletores máximos positivos e negativos nas direções x e y , permitindo a exportação de um relatório detalhado que descreve todas as etapas do cálculo e os coeficientes adotados para cada método. Para alcançar esse objetivo, seu desenvolvimento foi programado em linguagem HTML e JavaScript.

Embasamento Teórico

Todos os métodos tabelados utilizados na análise estrutural de lajes retangulares deste módulo possuem coeficientes que dependem diretamente de um parâmetro geométrico específico, denominado λ (*lambda*). Esse fator representa a relação entre os vãos da laje e é expresso pela equação (1):

$$\lambda = \frac{Ly}{Lx} \quad (1)$$

Em que:

Lx e Ly são os vãos da laje (m), definidos conforme os eixos adotados no modelo estrutural. O coeficiente relacionado ao momento fletor nas tabelas de cada método é determinado a partir do valor de λ .

Na figura 2, à esquerda, identificam-se os casos de lajes retangulares e suas respectivas vinculações conforme os métodos de Marcus (1938), Czerny (1956) e Bares (1967). À direita os casos foram elaborados pelo próprio autor a partir da análise das tabelas originais de Rusch (1970). Observa-se, por exemplo, que o caso 1 (laje quadriapoiada) para Marcus (1938), Czerny (1956) e Bares (1967) corresponde ao caso 10 em Rusch (1970), conforme ilustrado nas imagens.

De acordo com a convenção amplamente utilizada na engenharia, linhas a 45° representam engastes, linhas contínuas indicam apoios fixos e linhas tracejadas correspondem a bordas livres.

Figura 2 - Possíveis casos de lajes retangulares utilizadas para Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970)

Marcus (1938), Czerny (1956) e Bares (1967).			Rusch (1970).				
1	2A	2B	1	2	3	4	5
3	4A	4B	6	7	8	9	10
5A	5B	6	11	12	13	14	15

Fonte: O próprio autor (2025).

Método de Marcus

Segundo Camacho (2004, p. 18), o estudo desenvolvido por Marcus resultou de uma análise comparativa entre os valores obtidos e os resultados provenientes do Método das Grelhas. Durante essa investigação, Marcus (1938), observou que esse método fornece valores elevados para os momentos fletores positivos. Para melhorar a precisão e a representação do comportamento estrutural das lajes de concreto armado, foi introduzido um fator de correção, considerando as restrições de torção nos cantos da laje. Esse ajuste permitiu uma aproximação mais fiel dos valores obtidos teoricamente com os observados experimentalmente em placas reais (Silva; Horowitz, 2008). Assim, os momentos máximos positivos e negativos podem ser determinados por meio das equações 2 a 5.

$$M_x = \frac{q * Lx^2}{m_x} \quad (2)$$

$$M_y = \frac{q * Ly^2}{m_y} \quad (3)$$

$$X_x = \frac{q * Lx^2}{n_x} \quad (4)$$

$$X_y = \frac{q * Ly^2}{n_y} \quad (5)$$

Em que:

M_x e M_y : momento fletor máximo positivo nas direções x e y (kN.m/m);

X_x e X_y : momento fletor máximo negativo nas direções x e y (kN.m/m);

q : carga total uniformemente distribuída (kN/m²);

m_x e m_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos;

n_x e n_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos;

Lx e Ly : vãos da laje (m) conforme os casos específicos apresentados nas tabelas.

A figura 3 apresenta um trecho da Tabela de Marcus, demonstrando os coeficientes para diferentes configurações de apoio e relações geométricas. As Tabelas de Marcus utilizadas no presente módulo de programa foram extraídas de Silva (2018), o qual, por sua vez, as obteve de Rosa (2007). Conforme indicado por Silva (2018), Rosa (2007) adaptou essas tabelas considerando um coeficiente de Poisson igual a 0,20. Esta adaptação está de acordo com a atual NBR 6118:2023 (itens 8.2.9 e 14.7.3), que estabelece que os valores dos momentos positivos obtidos em tabelas devem ser corrigidos, considerando o coeficiente de Poisson ($\nu=0,20$), em substituição ao valor nulo ($\nu=0$) utilizado originalmente em algumas formulações.

Figura 3 - Trecho da tabela de Marcus - Caso 1 conforme a figura 2

1

L_y

 L_x

$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x} \qquad M_y = \frac{q \cdot l_y^2}{m_y}$$

$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	m_x	m_y	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	m_x	m_y
1,00	27,43	27,43	1,50	13,87	31,21
1,01	26,89	27,43	1,51	13,75	31,36
1,02	26,37	27,43	1,52	13,64	31,52

Fonte: Silva (2018), extraído de Rosa (2007).

Método de Czerny

Conforme Gontijo (2015), baseado na teoria da elasticidade, Czerny (1956) elaborou tabelas para o cálculo de momentos fletores considerando um coeficiente de Poisson $\nu=0$. Os momentos de engastamento independem do coeficiente de Poisson, ao contrário dos momentos positivos. As tabelas de Czerny utilizadas no módulo do programa aqui apresentado foram extraídas de Silva (2018), que, por sua vez, as obteve de Rolim (2016), conforme citado pelo autor. Silva (2018) ressalta que Rolim (2016) adaptou essas equações considerando um coeficiente de Poisson igual a 0,20, o que está de acordo com a atual NBR 6118:2023 (itens 8.2.9 e 14.7.3). Os momentos máximos positivos e negativos podem ser encontrados por meio das equações de 6 a 9.

$$M_x = \frac{p * Lx^2}{\alpha_x} \quad (6)$$

$$M_y = \frac{p * Ly^2}{\alpha_y} \quad (7)$$

$$M_{xe} = \frac{p * Lx^2}{\beta_x} \quad (8)$$

$$M_{ye} = \frac{p * Ly^2}{\beta_y} \quad (9)$$

Em que:

M_x e M_y : momento fletor máximo positivo nas direções x e y (kN.m/m);

M_{xe} e M_{ye} : momento fletor máximo negativo nas direções x e y (kN.m/m);

p : carga total uniformemente distribuída (kN/m²);

α_x e α_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos;

β_x e β_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos;

Lx e Ly : vãos da laje (m) conforme os casos específicos apresentados nas tabelas.

A figura 4 apresenta um trecho da Tabela de Czerny, demonstrando os coeficientes para diferentes configurações de apoio e relações geométricas.

Figura 4 - Trecho da tabela de Czerny - Caso 1 conforme a figura 2

λ	α_x	α_y	λ	α_x	α_y
1,00	22,70	22,70	1,51	12,62	23,50
1,01	22,32	22,66	1,52	12,54	23,50
1,02	21,94	22,62	1,53	12,46	23,50

Fonte: Silva (2018), extraído de Rolim (2016).

Método de Bares

Bares (1972), desenvolveu tabelas para o cálculo de lajes maciças. Os momentos máximos positivos e negativos podem ser encontrados por meio das equações de 10 a 13.

$$M_x = \mu_x * \frac{p * Lx^2}{100} \quad (10)$$

$$My = \mu_y * \frac{p * Lx^2}{100} \quad (11)$$

$$Xx = \mu'_x * \frac{p * Lx^2}{100} \quad (12)$$

$$Xy = \mu'_y * \frac{p * Lx^2}{100} \quad (13)$$

Em que:

Mx e My : momento fletor máximo positivo nas direções x e y (kN.m/m);

Xx e Xy : momento fletor máximo negativo nas direções x e y (kN.m/m);

p : carga total uniformemente distribuída (kN/m²);

μ_x e μ_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos;

μ'_x e μ'_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos;

Lx e Ly : vãos da laje (m) conforme os casos específicos apresentados nas tabelas.

Os coeficientes adimensionais μ_x , μ_y , μ'_x e μ'_y são obtidos nas tabelas de Bares, baseadas nas soluções em séries desenvolvidas por Bares (1972) e adaptadas por Carvalho e Figueiredo (2015), citados por Silva (2018), para coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,20, o que está de acordo com a atual NBR 6118:2023 (itens 8.2.9 e 14.7.3).

A figura 5 apresenta um trecho da Tabela de Bares, demonstrando os coeficientes para diferentes configurações de apoio e relações geométricas.

Figura 5 - Trecho da tabela de Bares - Caso 1 conforme a figura 2

λ	Caso 1	
	μ_x	μ_y
1,00	4,41	4,41
1,05	4,80	4,45

Fonte: Silva (2018), extraído de Carvalho e Figueiredo (2015).

Método de Rusch

De acordo com Pfeil (1979), dentre as tabelas utilizadas para o cálculo de solicitações em lajes, destacam-se as desenvolvidas por Rüsch (1970), que aplicam a teoria elástica das lajes e foram elaboradas com base na norma alemã DIN-1072 – Straßen- und Wegbrücken Lastannahmen (publicada em sua versão final em dezembro de 1985), que trata das hipóteses de cargas para pontes rodoviárias e de pedestres. Essas tabelas incluem coeficientes para diferentes situações de carregamento, abrangendo, inclusive, soluções para cargas de trem-tipo em pontes.

No entanto, neste estudo, serão considerados apenas os coeficientes correspondentes ao caso de carga uniformemente distribuída sobre toda a laje. Conforme descrito no Método das Tabelas de Rüsch, o primeiro passo para sua aplicação consiste na definição das condições de apoio da laje, classificadas em borda livre, apoiada ou engastada. Assim, as equações de Rusch são apresentadas a seguir:

$$Mx = \frac{q * Lx^2}{kx} \quad (14)$$

$$M_y = \frac{q * Lx^2}{k_y} \quad (15)$$

$$M_{xe} = \frac{q * Lx^2}{k_{xe}} \quad (16)$$

$$M_{ye} = \frac{q * Lx^2}{k_{ye}} \quad (17)$$

Em que:

M_x e M_y : momento fletor máximo positivo nas direções x e y (kN.m/m);

M_{xe} e M_{ye} : momento fletor máximo negativo nas direções x e y (kN.m/m);

q : carga total uniformemente distribuída (kN/m²);

k_x e k_y : coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos;

k_{xe} e k_{ye} : coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos;

L_x e L_y : vãos da laje (m) conforme os casos específicos apresentados nas tabelas.

Montanari (1976) afirma que as Tabelas de Rusch foram criadas utilizando coeficiente de Poisson de 1/6, ou seja, cerca de 0,17.

O próprio autor (2025) reorganizou os dados das Tabelas de Rusch originais, agrupando somente os valores para a carga distribuída para usá-los no módulo de programa aqui apresentado. A figura 6 apresenta um dos agrupamentos de tabelas para o caso 10 da figura 2.

Figura 6 – Agrupamento de tabelas originais de Rusch mostrando somente os coeficientes para carga distribuída em laje, caso 10 conforme a figura 2

TAB. RUSCH ORIGINAL	$\lambda = l_y/l_x$	k_x	k_y	k_{xe}	k_{ye}
1, 2 e 40	infinito	0,1250	0,0340	0,0000	0,0000
76	2,0	0,1000	0,0330	0,0000	0,0000
77	1,5	0,0780	0,0400	0,0000	0,0000
78	1,2	0,0590	0,0430	0,0000	0,0000
79	1,0	0,0430	0,0430	0,0000	0,0000
80	0,8	0,0270	0,0400	0,0000	0,0000
81	$\leq 0,5$	0,0208	0,1250	0,0000	0,0000

Fonte: Adaptado de Rusch (1970).

Metodologia

Fernandes e Nirschl (2020) e Silva e Nirschl (2020), dentro do grupo de pesquisa NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental), cadastrado no CNPq, desenvolveram o programa *online* IFESTRUT-LAJES, em que o usuário é capaz de desenhar lajes com diversas opções de vinculações e cargas. Posteriormente, foram desenvolvidos módulos relacionados ao cálculo dos esforços em lajes. O módulo aqui apresentado (Cálculo via tabelas) é sobre o cálculo de momentos máximos em lajes retangulares submetidas a cargas distribuídas. O programa

IFESTRUT-LAJES, bem como esse novo módulo aqui apresentado, é disponibilizado sob o modelo de licença proprietária gratuita (*freeware*), permitindo seu uso sem custos, mas sem disponibilização do código-fonte ou possibilidade de modificações pelo usuário.

Na tela inicial (figura 8), criada por Fernandes e Nirschl (2020) e Silva e Nirschl (2020), o usuário é capaz de selecionar entre funcionalidades do programa, as quais constam a exportação e importação de lajes, além da possibilidade de desenhar a laje e aplicar vinculações nos lados configurados "0-1", "1-2", "2-3" ou "3-0". As possibilidades de vinculações abrangem três opções: engaste, apoio e livre. Quanto a aplicação de cargas, podem ser pontuais ou distribuídas, mas o enfoque do módulo aqui implementado é o cálculo de esforços máximos em lajes retangulares submetidas a cargas distribuídas. Desenhada a laje, o programa disponibiliza seus dados em vetores, que são utilizados no desenvolvimento dos módulos de cálculo.

Desenvolvimento do módulo

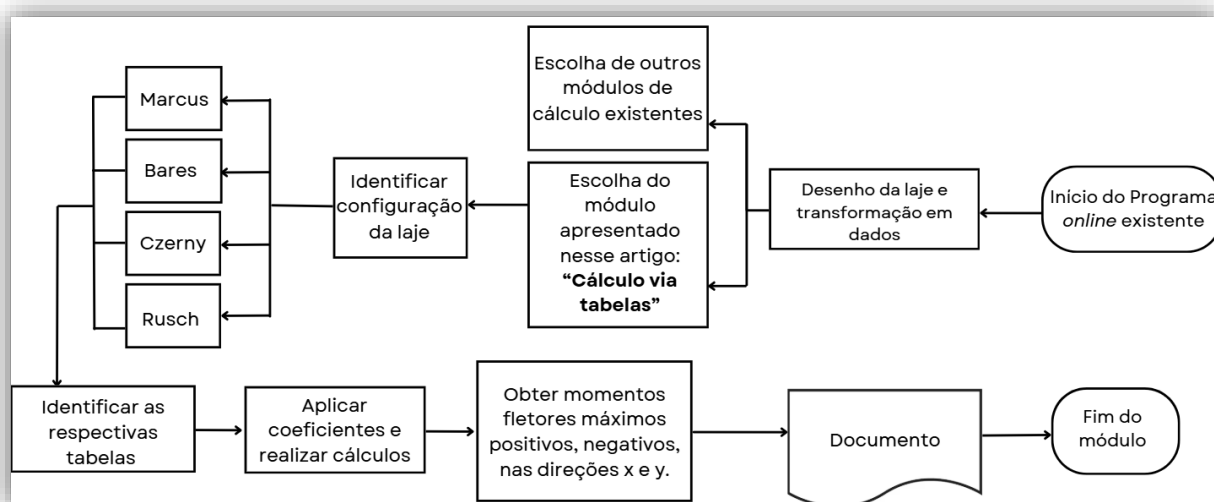
Os métodos de cálculo de momentos fletores para lajes retangulares submetidas a carga distribuída via tabelas de Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970) foram programados e implementados como um módulo dentro do programa IFESTRUT-LAJES. A programação foi realizada em JavaScript e HTML, utilizando o armazenamento dos coeficientes e dados tabulados conforme os diferentes casos previstos para cada configuração de laje.

O módulo, a partir dos dados da laje desenhada no programa existente, identifica automaticamente o tipo de laje e a respectiva tabela a ser empregada em cada método. Com base nesses parâmetros, o módulo calcula os momentos fletores máximos (positivos e negativos) nas direções x e y , apresentando os resultados em uma tabela de saída.

Como objetivo principal do módulo de programa, foi implementada a geração de um relatório técnico em formato PDF, desenvolvido com a biblioteca pdfmake de Pampuch (2025). O relatório contém os valores numéricos obtidos, as tabelas de coeficientes utilizadas, as equações de cálculo empregadas e observações adicionais para auxiliar na compreensão dos resultados, como a definição dos eixos de referência, que podem variar conforme o caso.

A figura 7 apresenta o fluxograma do programa, ilustrando de forma objetiva o fluxo de processamento e a interação entre os módulos existentes e o novo módulo implementado.

Figura 7 – Fluxograma do módulo implementado no programa



Fonte: O próprio autor (2025).

Resultados

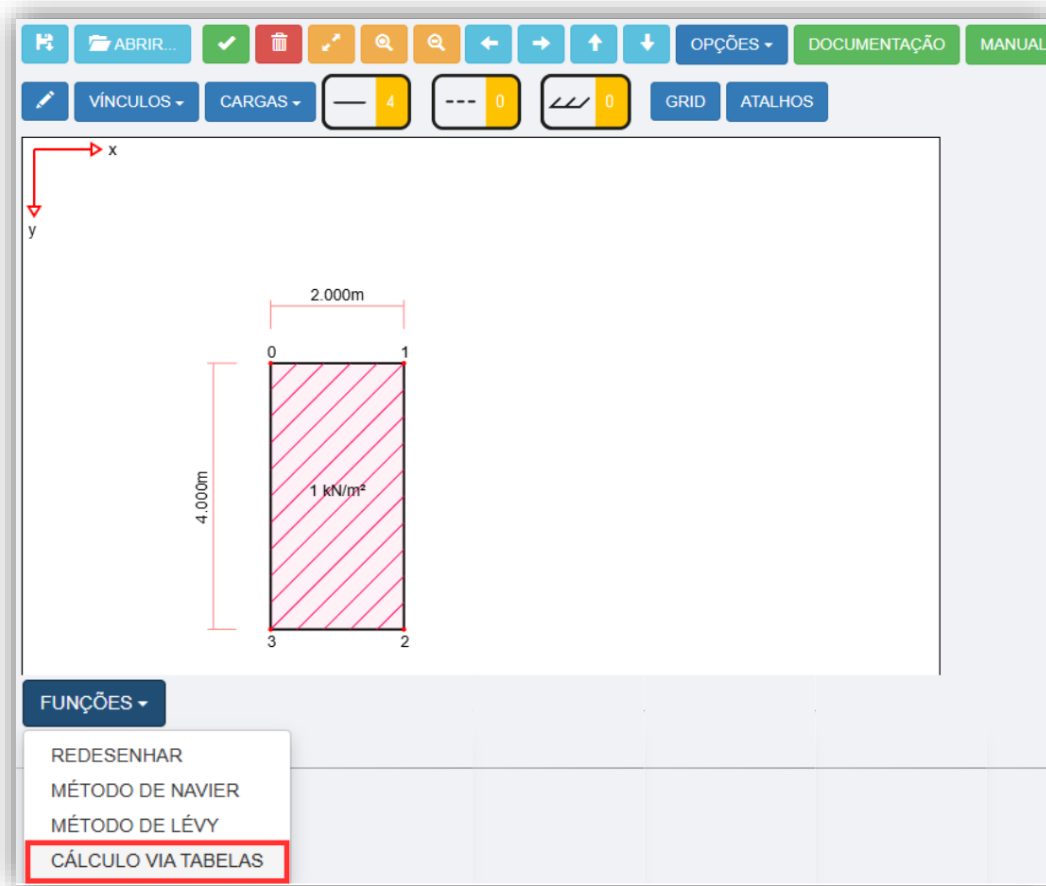
Os resultados da pesquisa incluem a implementação do módulo computacional no programa IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) disponível *online* (<https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut-lajes/ifestrut-lajes.html>).

Na interface do programa IFESTRUT-LAJES (figura 8), destaca-se a função "Cálculo via tabelas", na qual o módulo aqui apresentado identifica automaticamente o tipo de laje correspondente segundo os métodos tabelados de Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970), a partir dos casos apresentados na figura 2. Dessa forma, os cálculos são automatizados com base nas tabelas de cada método, gerando uma tabela de resultados organizada (figura 9), contendo os momentos fletores máximos positivos e negativos, nas direções x e y .

O módulo possibilita a exportação de um arquivo em PDF. O relatório gerado, acessado por meio do botão (que aparece na figura 9) "GERAR RELATÓRIO", o qual tem algumas partes mostradas nas figuras 10 a 14, detalha a metodologia aplicada, as equações utilizadas e os resultados obtidos, resumidos na mesma tabela, o que permite a comparação dos valores calculados a partir dos diferentes métodos. Essa funcionalidade (geração de relatório) assegura maior transparência e confiabilidade ao processo de análise estrutural, contribuindo para a verificação e interpretação dos resultados obtidos.

Na figura 14, são apresentados, como exemplo, os cálculos e a tabela referentes ao método de Bares, aplicados ao caso 1, correspondente à laje quadriapoiaada. O relatório também contempla os mesmos cálculos e as respectivas tabelas para os demais métodos analisados (Marcus, Czerny e Rusch), sendo ainda incluída, ao final, a tabela comparativa consolidada com todos os resultados.

Figura 8 – Desenho de uma laje quadriapoiada submetida a carga de 1 kN/m² no programa



Fonte: O próprio autor (2025), usando o programa IFESTRUT-LAJES.

Figura 9 - Resultados calculados e opção de gerar relatório detalhado

TABELA DE RESULTADOS				
MÉTODO	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxe (kN*m/m)	Mye (kN*m/m)
MARCUS	0.378	0.095	0.000	0.000
BARES	0.400	0.146	0.000	0.000
CZERNY	0.404	0.170	0.000	0.000
RUSCH	0.400	0.132	0.000	0.000

Marcus: lâmbida tabelado, ok.
 Czerny: lâmbida tabelado, ok.
 Bares: lâmbida tabelado, ok.
 Rusch: lâmbida tabelado, ok.

GERAR RELATÓRIO

Fonte: O próprio autor (2025), usando o módulo do programa criado.

Figura 10 – Dados de entrada iniciais apresentados no relatório gerado pelo módulo

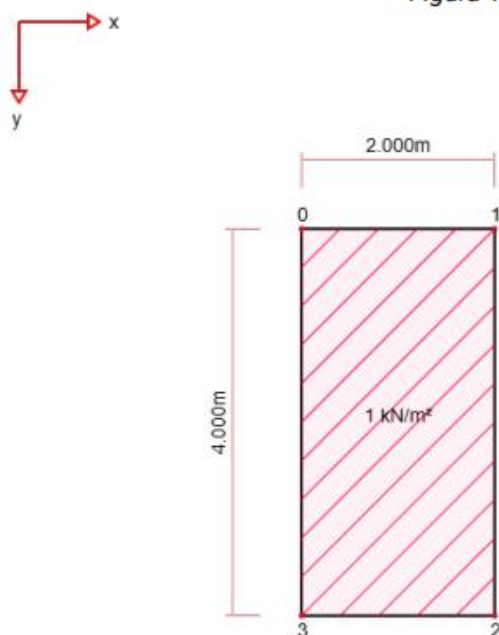
DADOS DE ENTRADA

OBSERVAÇÕES GERAIS:

- Os índices são ordenados de acordo com a inserção dos elementos;
- Todas as coordenadas "x,y" são em relação ao vértice 0 da laje, sendo as orientações dos eixos observadas no canto superior esquerdo da Figura 1;
- As resoluções de equações consideraram todas as casas decimais de suas variáveis. Entretanto, nas tabelas os valores serão mostrados com a quantidade de algarismos significativos escolhida (3).

Na Figura 1 podem ser vistos todos os elementos inseridos na laje.

Figura 1 - Tela de Entrada.



A partir daqui, o relatório utilizará o sistema kN-m, mostrando os valores convertidos em relação aos dados de entrada do usuário.

LAJE

Tabela 1 - Propriedades da Laje.

Módulo de elasticidade(E) (kN/m ²)	Espessura da laje(h) (m)	Coefficiente de Poisson(v)
210000000.000	0.0500	0.200

Fonte: O próprio autor (2025), usando o módulo do programa criado.

Figura 11 – Parte do relatório gerado, constando os dados dos vínculos identificados, seus respectivos lados, carga aplicada e observações relacionadas ao coeficiente de Poisson

VÍNCULOS		
Tabela 2 - Dados dos apoios.		
Tipo de vínculo	Índice	Lado
Apoio	0	0-1
Apoio	1	1-2
Apoio	2	2-3
Apoio	3	3-0

CARGA SOBRE TODA LAJE	
Por meio da Tabela 3 podem ser observados os dados da Carga Sobre Toda Laje.	
Tabela 3 - Dados da Cargas Sobre Toda Laje.	
Índice	Módulo (kN/m ²)
0	1.000

OBSERVAÇÕES:	
A carga de entrada uniformemente distribuída na laje (Módulo = 1 kN/m ²) é representada pela letra q nas equações.	
Embora o usuário tenha a opção de alterar o coeficiente de Poisson (ν) nos dados de entrada, as tabelas consideram $\nu = 0,20$ para Marcus, Czerny e Bares, e $\nu = 0,17$ para Rusch. Esses valores estão de acordo com a NBR 6118:2023 itens 8.2.9 e 14.7.3 – Projeto de Estruturas de Concreto, que recomenda valores típicos para o coeficiente de Poisson do concreto, geralmente variando entre 0,15 e 0,25, dependendo da classe do material e do seu estado de deformação.	

Fonte: O próprio autor (2025), usando o módulo do programa criado

Figura 12 – Parte do relatório gerado, constando os limites de λ estabelecidos para Marcus (1938)

LIMITES DE LAMBDA
MÉTODO DE MARCUS O valor máximo de λ ($\lambda = L_y/L_x$) para todos os casos é 2,00. Se for inserido um valor superior, ele será automaticamente ajustado para 2,00. Os valores mínimos de λ variam conforme o caso: - Casos 1, 3 e 6 - Mínimo: 1,00. - Casos 2, 4 e 5 - Mínimo: 0,50. Para os casos 1, 3 e 6 de Marcus o λ mínimo equivale a 1,00. Como $\lambda = L_y/L_x$, se $L_x > L_y$ os eixos serão invertidos, para que L_y seja sempre $\geq L_x$, não obtendo portanto valores inferiores a 1,00.

Fonte: O próprio autor (2025), usando o módulo do programa criado.

Figura 13 – Parte do relatório gerado, constando os limites de *lambda* (λ) estabelecidos para Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970)

MÉTODO DE CZERNY E BARES
 Se um valor de *lambda* (λ) superior a 2,00 for inserido, os seguintes ajustes são feitos:
 - Czerny - Usa os valores definidos na tabela para $\lambda > 2,00$.
 - Bares - Adota os valores correspondentes a $\lambda = \infty$.
 Para todos os casos de Czerny e Bares, $L_y \geq L_x$, já que o *lambda* mínimo equivale a 1,00, e o *lambda* é estabelecido pela relação ($\lambda = L_y/L_x$).

MÉTODO DE RUSCH
 - Caso 1, 2 e 3: Se o *lambda* for menor que 0,50, adota-se 0,50. Se o *lambda* for maior que 3,50, é adotado o maior valor da tabela de Rusch (infinito).
 - Caso 4, 5 e 6: $L_y \geq L_x$, já que o *lambda* mínimo equivale a 1,00, e o *lambda* é estabelecido pela relação ($\lambda = L_y/L_x$). Se o *lambda* for maior que 4,00, é adotado o maior valor da tabela de Rusch (infinito).
 - Caso 7, 8 e 9: Se o *lambda* for menor que 1,00, adota-se o menor valor da tabela de Rusch (<1,00), e calcula-se os esforços utilizando o L_y na equação ao invés de L_x . Se o *lambda* for maior que 4,00, é adotado o maior valor da tabela de Rusch.
 - Caso 10, 11 e 12: Se o *lambda* for menor que 0,50, adota-se o menor valor da tabela de Rusch (<0,50), e calcula-se os esforços utilizando o L_y na equação ao invés de L_x . Se o *lambda* for maior que 2,00, para o caso 11 e 12 adota-se 2,00 e para o caso 10 é adotado o maior valor da tabela de Rusch (infinito).
 - Caso 13 e 14: Se o *lambda* for menor que 0,80, adota-se o menor valor da tabela de Rusch (<0,80), e calcula-se os esforços utilizando o L_y na equação ao invés de L_x . Se o *lambda* for maior que 2,00, é adotado o maior valor da tabela de Rusch (infinito).
 - Caso 15: Se o *lambda* for menor que 1,00, adota-se o menor valor da tabela de Rusch (<1,00), e calcula-se os esforços utilizando o L_y na equação ao invés de L_x . Se o *lambda* for maior que 2,00, é adotado o maior valor da tabela de Rusch (infinito).

Fonte: O próprio autor (2025), usando o módulo do programa criado.

Com o objetivo de validar dos resultados fornecidos pelo módulo de programa, foram efetuados os cálculos manualmente e comparados com os resultados apresentados pelo programa. A verificação contemplou todos os casos possíveis (Figura 2), abrangendo variações de dimensões, cargas, vinculações, unidades e demais parâmetros relevantes, de modo a identificar inconsistências e assegurar a confiabilidade do sistema. Apresenta-se, a seguir, um dos possíveis casos de forma detalhada.

Na figura 15, é apresentado o desenho de uma laje retangular quadriapoiada (2 m x 4 m) submetida a carga distribuída de 1 kN/m² e os resultados calculados pelo módulo do programa *online*. Na tabela 1, são apresentados os resultados obtidos através dos cálculos manuais das equações dos métodos tabelados, para validação do programa.

Obviamente, uma laje de dimensões (2 m x 4 m) é a mesma que uma laje (4 m x 2 m). Assim, com o objetivo de verificar a consistência dos resultados obtidos, realizou-se a comparação entre ambas as situações, considerando a inversão dos eixos na figura 16.

Figura 14 – Parte do relatório gerado, constando a explicação dos cálculos para o método de Bares

CÁLCULOS – TABELA DE BARES:

De acordo com os vínculos da laje, no caso de Bares, utiliza-se a tabela tipo 1.

A tabela de Bares tipo 1 é:

λ	Caso 1	
	μ_x	μ_y
1,00	4,41	4,41
1,05	4,80	4,45
1,10	5,18	4,49
1,15	5,56	4,49
1,20	5,90	4,48
1,25	6,27	4,45
1,30	6,60	4,42
1,35	6,93	4,37
1,40	7,25	4,33
1,45	7,55	4,30
1,50	7,86	4,25
1,55	8,12	4,20
1,60	8,34	3,14
1,65	8,62	4,07
1,70	8,86	4,00
1,75	9,06	3,96
1,80	9,27	3,91
1,85	9,45	3,83
1,90	9,63	3,75
1,95	9,77	3,71
2,00	10,00	3,64
∞	12,57	3,77

Fonte: Silva (2018), extraído de Carvalho e Figueiredo (2015).

Na tabela, encontram-se os valores para $\mu_x = 10.000$, $\mu_y = 3.640$, $\mu_x = 0.000$ e $\mu_y = 0.000$ correspondentes ao respectivo valor para o λ .

Conforme a relação $\lambda = L_y/L_x$, em que $L_y = 4$ e $L_x = 2$, o λ obtido é 2.000, interpolando a partir da tabela anterior.

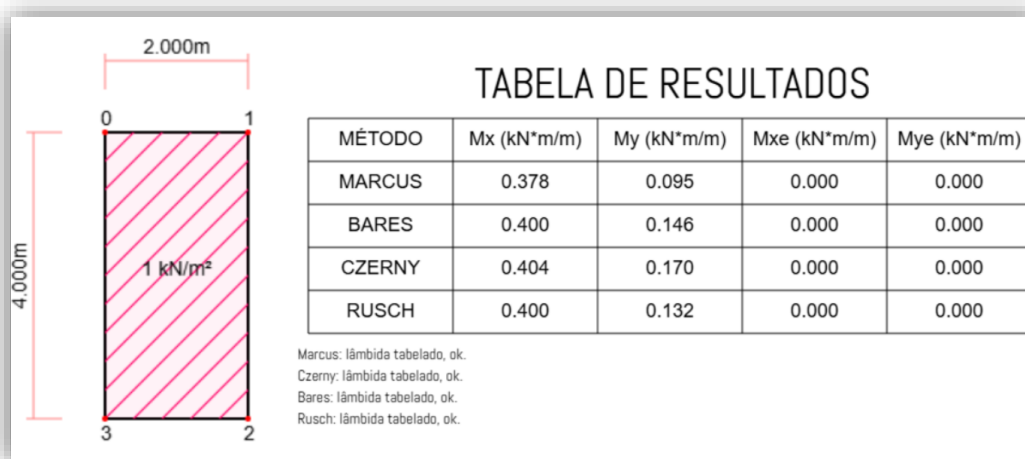
Portanto, aplicam-se as seguintes equações com o propósito de calcular os momentos máximos positivo e negativo, para as direções em x e y:

$$M_x = \frac{\mu_x \cdot q \cdot L_x^2}{100} \quad M_y = \frac{\mu_y \cdot q \cdot L_x^2}{100}$$

$$M_{xe} = \frac{\mu'_x \cdot q \cdot L_x^2}{100} \quad M_{ye} = \frac{\mu'_y \cdot q \cdot L_x^2}{100}$$

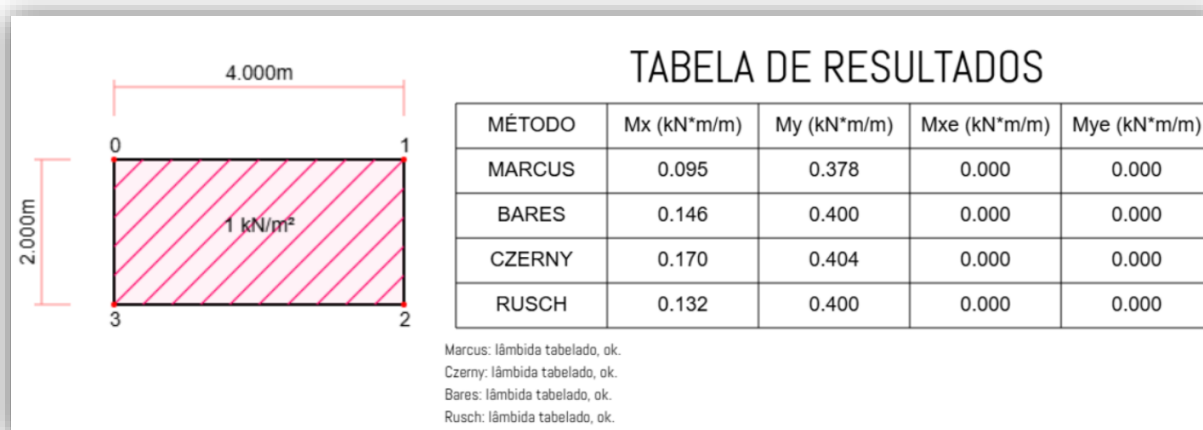
Fonte: O próprio autor (2025), usando módulo de programa criado.

Figura 15 – Tabela de resultados de uma laje retangular quadriapoiada (2 m x 4 m), submetida a carga distribuída de 1 kN/m²



Fonte: O próprio autor (2025), usando módulo de programa criado.

Figura 16 – Tabela de resultados de uma laje retangular quadriapoiada (4 m x 2 m) desenhada no programa, submetida a carga distribuída de 1 kN/m²



Fonte: O próprio autor (2025), usando módulo de programa criado.

A tabela 1 apresenta os resultados manuais calculados com as respectivas equações apresentadas para cada método tabelado. Os cálculos efetuados pelo programa foram iguais aos cálculos manuais.

Além disso, elaborou-se a tabela 2, com as variações entre os métodos, expressas em porcentagem (%), a fim de possibilitar uma análise comparativa dos resultados. Observou-se que os casos que apresentam maiores variações entre si são Marcus (1938) e Rusch (1970) para M_x , Bares (1967) e Czerny (1956) ou Rusch (1970) e Czerny (1956) para M_y . Por outro lado, Bares (1967) e Rusch (1970) apresentaram as menores variações, tanto para M_x quanto para M_y . Essas variações coincidem com os estudos de Longo (2022) e Gontijo (2015). A partir dos estudos desses autores, a análise comparativa realizada entre os métodos tabelados — Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970) — e *softwares* de cálculo estrutural, evidenciou diferenças significativas. Os autores citam que os métodos tabelados apresentam como principal vantagem cálculos manuais diretos, com baixo risco de erro operacional, sendo ideais para estimativas preliminares e para uso acadêmico no

entendimento do comportamento estrutural. No entanto, esses métodos se baseiam em condições de contorno idealizadas, assumem rigidez infinita em determinadas direções, desconsideram deformações diferenciais, variações locais de rigidez e efeitos tridimensionais. Além disso, limitam-se a combinações pré-definidas de vãos e condições de apoio, obrigando a aproximações quando o caso real não se enquadra exatamente nas tabelas. Carvalho (1994) e Hambly (1976) concordam que os *softwares* de análise estrutural — baseados em métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou a analogia de grelha — oferecem maior flexibilidade na modelagem, permitindo considerar condições reais de apoio, rigidez à torção, continuidade entre elementos, cargas concentradas e geometrias irregulares. Isso se traduz em resultados mais próximos do comportamento real da estrutura, especialmente em casos complexos.

Tabela 1 – Tabela de resultados dos cálculos manuais efetuados para uma laje retangular quadriapoada (2 m x 4 m e 4 m x 2 m), submetida a carga distribuída de 1 kN/m²

Caso	Método	(Lx x Ly) (m)	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxe (kN*m/m)	Mye (kN*m/m)
1	MARCUS	2 X 4	0,095	0,378	0,000	0,000
		4 X 2	0,378	0,095	0,000	0,000
1	BARES	2 X 4	0,146	0,400	0,000	0,000
		4 X 2	0,400	0,146	0,000	0,000
1	CZERNY	2 X 4	0,170	0,500	0,000	0,000
		4 X 2	0,500	0,170	0,000	0,000
10	RUSCH	2 X 4	0,132	0,400	0,000	0,000
		4 X 2	0,400	0,132	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor (2025).

Tabela 2 – Tabela comparativa entre os métodos das variações dos resultados para os esforços obtidos na Tabela 1

Variação Mx %	Variação My %	Métodos
79,96	24,31	Marcus-Czerny
39,56	5,39	Marcus-Rusch
53,94	5,39	Marcus-Bares
14,46	25,00	Bares-Czerny
10,30	0,00	Bares-Rusch
22,45	25,00	Czerny-Rusch

Fonte: O próprio autor (2025).

Assim como no presente estudo, Moura (2023) empregou métodos tabelados para o dimensionamento de lajes maciças, obtendo resultados (Figura 17) que coincidem com aqueles gerados pelo módulo de *software* aqui desenvolvido (Tabela 3). Ressalta-se, entretanto, que em alguns casos observou-se uma pequena diferença nos valores, decorrente do fato de que o módulo proposto neste artigo realiza a interpolação de valores intermediários não presentes diretamente nas tabelas. Os resultados apresentados na Figura 17 correspondem à laje do Caso 1, conforme a tabela de Czerny.

Figura 17 – Trecho de tabela de dimensionamento de lajes maciças submetidas a carga uniforme de

7,339 kN/m²

λ	Direção aço	Coeficientes de Czerny					$M_x (+)$ [kN.cm]	$M_y (+)$ [kN.cm]	$M_x (-)$ [kN.cm]	$M_y (-)$ [kN.cm]
		α_x	α_y	β_x	β_y	α_z				
1,00	x e y	22,70	22,70	0,00	0,00	21,00	291,0	291,0	0,0	0,0
1,33	x e y	14,72	22,78	0,00	0,00	13,18	448,7	289,9	0,0	0,0
1,67	x e y	11,38	23,50	0,00	0,00	9,98	580,4	281,1	0,0	0,0
2,00	x e y	9,90	23,50	0,00	0,00	8,60	667,2	281,1	0,0	0,0

Fonte: Moura (2023).

Tabela 3 – Exemplos de momentos fletores máximos obtidos pelo módulo de programa aqui apresentado (usando Czerny) para lajes submetidas a carga uniforme de 7,339 kN/m²

CASO	λ	α_x	α_y	$M_x (+)$ [kN.m/m]	$M_y (+)$ [kN.m/m]	$M_x (-)$ [kN.m/m]	$M_y (-)$ [kN.m/m]
1	1,00	22,70	22,70	2,91	2,91	0,00	0,00
1	1,33	14,67	22,83	4,50	2,89	0,00	0,00
1	1,67	11,40	23,50	5,79	2,88	0,00	0,00
1	2,00	9,90	23,50	6,67	2,81	0,00	0,00

Fonte: O próprio autor (2025), usando o módulo de programa criado.

Analogamente, foi realizada uma análise comparativa com os dados apresentados por Gois, R. Alves e J. Alves (2020), usando a tabela de Bares (Tabela 4). Os resultados obtidos com o módulo de *software* programado mostraram-se coerentes.

Tabela 4 – Momentos fletores máximos de lajes maciças submetidas a carga uniforme de 1851,85 gf/m²

CASO	μ_x	μ_y	μ'_x	μ'_y	$M_x (+)$ [kN.m/m]	$M_y (+)$ [kN.m/m]	$M_x (-)$ [kN.m/m]	$M_y (-)$ [kN.m/m]
2B - L1	5,24	2,12	11,09	0,00	34,95	14,14	73,97	0,00
2A - L2	6,45	3,88	0,00	11,23	43,02	25,88	0,00	74,90
6 - L3	3,53	1,49	7,57	5,72	23,55	9,94	50,50	38,15
3 - L4	4,73	2,25	10,41	8,06	31,55	15,01	69,43	53,76
5B - L5	3,74	1,35	8,00	5,72	24,95	9,00	53,36	38,15

Fonte: Adaptado de Gois, R. Alves e J. Alves (2020).

Tabela 5 – Momentos fletores máximos obtidos pelo método tabelado de Bares para lajes submetidas a carga uniforme de 1851,85 gf/m²

CASO	μ_x	μ_y	μ'_x	μ'_y	$M_x (+)$ [gf.m/m]	$M_y (+)$ [gf.m/m]	$M_x (-)$ [gf.m/m]	$M_y (-)$ [gf.m/m]
2B - L1	5,77	2,12	11,27	0,00	37,74	13,87	73,71	0,00

2A - L2	6,60	4,18	0,00	11,23	43,16	27,34	0,00	73,44
6 - L3	3,58	1,66	7,57	5,72	23,41	10,86	49,51	37,41
3 - L4	4,81	2,47	10,62	8,06	31,46	16,15	69,46	52,71
5B - L5	3,78	1,53	8,00	5,72	24,72	10,01	52,32	37,41

Fonte: O próprio autor (2025), usando os resultados do módulo de programa criado.

Conclusão

O desenvolvimento do módulo de programa computacional para a análise de lajes retangulares via tabelas buscou suprir a necessidade de uma ferramenta que permitisse não apenas o cálculo automatizado dos esforços estruturais, mas também a comparação entre diferentes metodologias tabeladas e sua confrontação com métodos numéricos empregados em *softwares* de engenharia estrutural. A partir da implementação dos métodos de Marcus (1938), Czerny (1956), Bares (1967) e Rusch (1970), foi possível estruturar um sistema que fornece resultados organizados em tabela, contemplando os esforços máximos e mínimos nas direções x e y . O relatório gerado detalha todas as etapas do cálculo, incluindo as equações utilizadas, os valores obtidos e observações sobre os sentidos dos esforços e limites de λ (λ).

Comparações feitas por outros autores com *softwares* baseados em outros métodos de análise de lajes demonstraram que os métodos tabelados, embora coerentes e consistentes, podem apresentar discrepâncias, as quais resultam das hipóteses simplificadoras presentes nas tabelas, que assumem condições de contorno idealizadas e desconsideram efeitos tridimensionais, podendo conduzir a resultados conservadores e, em alguns casos, antieconômicos. Por outro lado, os *softwares* de análise estrutural permitem incorporar características da estrutura, como rigidez à torção, continuidade, irregularidades geométricas e carregamentos diferenciados, resultando em soluções mais próximas do comportamento real. Entretanto, o uso exclusivo dessas ferramentas, sem a compreensão das bases teóricas, pode limitar a capacidade de análise crítica e de verificação dos resultados.

Dessa forma, a pesquisa aqui relatada atingiu seu objetivo ao desenvolver um recurso que auxilia engenheiros, professores e estudantes tanto na análise quanto na compreensão do comportamento estrutural de lajes retangulares. O módulo computacional incorporado ao programa IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) permite não apenas compreender a origem dos valores obtidos, mas também avaliar quando o uso de modelos mais sofisticados é justificado para otimizar a precisão e a economia no projeto.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2023). *NBR 6118:2023 – Projeto de estruturas de concreto — Procedimento*.

Bares, R. (1967). *Elastic Analysis of Flat Slabs*. Oxford: Pergamon Press.

Bastos, P. (2005). *Material didático para o estudo das lajes de concreto armado*. [Notas de Aula]. Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista - UNESP. https://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/ad_min/arquivosUpload/3922/material/UNESP_Bauru_SP_Lajes%20de%20Concreto_Paulo%20Bastos_nov_2005.pdf.

Camacho, J. (2004). *Material didático para o estudo das lajes*. [Notas de Aula]. Faculdade de Engenharia

de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista - UNESP.

https://www.academia.edu/38305036/Estudo_das_lajes.

Carvalho, R. (1994). *Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. [Tese de doutorado, Universidade de São Paulo]. Escola de Engenharia de São Carlos. Repositório USP. <https://repositorio.usp.br/item/000739703>.

Czerny, M. (1956). *Beton-Kalender*. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn.

Deutsches Institut für Normung. (1985). *DIN 1072 – Straßen- und Wegbrücken: Lastannahmen*. Berlin: Beuth Verlag.

- Fernandes, J., & Nirschl, G. (2020). *CAD-LAJES: site on-line para estruturas planas fletidas*. CONICT – Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia, Presidente Epitácio. <https://ocs.ifsp.edu.br/conict/xiconict/paper/view/6674>.
- FTOOL - *Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas*. (2025). (Versão 4.01). [Software]. InstitutoTecnograf/PUC-Rio. <https://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/pt/prod.html>.
- Gontijo, G. (2015). *Cálculo e análise dos momentos fletores em lajes de concreto armado*. [Monografia de especialização, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG]. Escola de Engenharia - Departamento de Engenharia de Estruturas. Repositório UFMG. <https://repositorio.ufmg.br/server/api/core/bitstreams/823ce7e6-4790-40e6-851f-a14fd7db4df8/content>.
- Hambly, E. (1976). *Bridge deck behavior*. London, Chapman and Hall.
- LINEAR ELEMENTS STRUCTURE MODEL - LESM. (2022). *Softwares para modelagem de estruturas por elementos lineares*. (Versão 3.0.0). [Software]. InstitutoTecnograf/PUC-Rio. <https://web.tecgraf.puc-rio.br/lesm/download.html>.
- Longo, L. F. (2023). Cálculo de lajes por meio de tabelas. AltoQi, 2022. <https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/360003081494>
- Marcus, H. (1938). *Tafeln zur Berechnung rechteckiger Platten*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Moura, T. (2023). Lajes maciças treliçadas e nervuradas – análise comparativa. REEC – *Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, Vol. 19, No. 1, pp. 194-209. <https://revistas.ufg.br/reec/article/view/57832>.
- Montanari, I. (1976, Setembro). *Tabelas para Pontes em Laje Contínua*. [Notas de Aula – Apostila]. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica. Publicação No. 169, 97 p. Repositório Institucional EESC. <http://repositorio.eesc.usp.br/items/64db17cc-e02a-4543-baaf-b6bac91c58a3>.
- Pampuch, B., & Libor, M. (2020, 20 de Julho). PDFMake: Biblioteca geradora de pdf. Versão 0.1.6.8. <http://www.pdfmake.org/>.
- Pfeil, W. *Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- Rusch, H. (1970). *Tafeln zur Berechnung von Stahlbetonplatten nach der Elastizitätstheorie*. Berlin: Ernst & Sohn.
- Silva, A. B. (2018). *Análise comparativa dos momentos fletores de lajes maciças entre o software eberick e métodos simplificados*. [Trabalho de Conclusão de Curso, Bacharelado em Engenharia Civil]. Universidade Federal de Alagoas. Repositório UFAL. <https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/4804/1/An%C3%A1lise%20comparativa%20dos%20momentos%20fletores%20de%20lajes%20maci%C3%A7as%20entre%20o%20software%20Eberick%20e%20m%C3%A9todos%20simplificados.pdf>.
- Silva, F., & Horowitz, B. (2008, 9 de Junho). Momentos fletores em vigas de edifícios de concreto armado. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, Vol. 1, No. 2, pp. 193–211. <https://revistas.ibracon.org.br/index.php/riem/article/view/21>.
- Silva, G., & Nirschl, G. (2020). *IFESTRUT-LAJES: Software on-line para engenharia civil*. CONICT – Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia, Presidente Epitácio. [Software]. <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrut-lajes.html>.
- Gois, B., & Alves, R., & Alves, J. (2020, Outubro). Estudo do combate de momentos das cargas em lajes maciças engastadas. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, Ano 05, Ed. 1., Vol. 17, pp. 88-113. ISSN: 2448-0959. <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/engenharia-civil/lajes-macicas>.
- Soares, A. (2023). *Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá]. Repositório UNIFEI. <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/3766>.