

ESFERA EM UM PLANO INCLINADO: EFEITO DA ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO¹

Edvan RANGEL JÚNIOR²
FATEC ITAQUERA
Aluno FATEC ITAQUERA

Leonardo Adelmo de SOUZA³
FATEC ITAQUERA
Aluno FATEC ITAQUERA

Rogério Rodrigues de SOUZA⁴
FATEC ITAQUERA/TATUAPÉ
Aluno FATEC ITAQUERA

RESUMO

Apresenta-se um trabalho que procura descrever um experimento construído para estudo do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), com ênfase no momento de inércia de uma esfera. O experimento se trata de um plano inclinado com uma guia (calha), para rolamento de uma esfera. Utilizam-se materiais, para a construção mecânica com custo reduzido. O objetivo é obter a aceleração da esfera que ao descer este plano, o faz com rolamento puro. Procurou-se ressaltar que a dinâmica de rotação tem importância fundamental para discutir os resultados obtidos. Na construção deste experimento, os alunos envolvidos puderam desenvolver competências dos seus respectivos cursos de tecnologia: em Fabricação Mecânica com o desenho do projeto e construção da estrutura física, e em Automação Industrial com a elaboração de programa para a leitura de sensores, que registram o tempo de passagem da esfera, e a montagem do circuito eletrônico. A aceleração da esfera, obtida experimentalmente, é comparada com a aceleração teórica. Por meio de um gráfico da distância percorrida versus tempo, a aceleração da esfera é obtida a partir de um ajuste de segunda ordem do programa EXCEL. O rolamento puro, isto é, sem deslizamento, diminui a energia cinética de translação da esfera. Observa-se que o momento de inércia tem um papel fundamental para o valor da aceleração da esfera ao percorrer este plano inclinado. A aceleração da esfera obtida experimentalmente, é de $0,263 \text{ m/s}^2$. Sem considerar o efeito da calha, corresponde a um erro de 13,7% em relação ao valor teórico. Com o refinamento, que leva em consideração o raio de rolamento, que é consequência da calha, o valor obtido corresponde a um erro relativo de 12,6%. Por outro lado, se o momento de inércia não é considerado, o resultado obtido corresponde a um erro relativo de 38,4%.

Palavras-chave: plano inclinado; momento de inércia; rolamento puro.

SPHERE ON AN INCLINED PLANE: EFFECT OF ROTATION KINETIC ENERGY

ABSTRACT

¹ Trabalho de Iniciação Científica.

² E-mail: edvanjr@gmail.com

³ E-mail: leonardo-adelmo@hotmail.com

⁴ E-mail: rogerio.souza10@fatec.sp.gov.br

A paper is presented that seeks to describe an experiment constructed to study uniformly varied rectilinear motion (MRUV), with emphasis on the moment of inertia of a sphere. The experiment is about an inclined plane with a guide (gutter), for rolling a sphere. Materials are used for the mechanical construction with reduced cost. The objective is to obtain the acceleration of the sphere that, when descending this plane, does so with pure rolling. We tried to emphasize that the dynamics of rotation is of fundamental importance to discuss the results obtained. In the construction of this experiment, the students involved were able to develop skills from their respective technology courses: in Mechanical Manufacturing with the design of the project and construction of the physical structure, and in Industrial Automation with the elaboration of a program for reading sensors, which record the time of passage of the sphere, and assembly of the electronic circuit. The acceleration of the sphere obtained experimentally is compared with the theoretical acceleration. By means of a plot of the distance traveled versus time, the acceleration of the sphere is obtained from an adjustment of second order of the EXCEL program. Pure rolling, that is, without slipping, decreases the translational kinetic energy of the sphere. Can be seen that the moment of inertia plays a fundamental role in the value of the acceleration of the sphere as it traverses this inclined plane. The acceleration of the sphere obtained experimentally is 0.263 m/s^2 . Without considering the gutter effect, it corresponds to an error of 13.7% in relation to the theoretical value. With the refinement, which considers the rolling radius, which is a consequence of the gutter, the value obtained corresponds to a relative error of 12.6%. On the other hand, if the moment of inertia is not considered, the result obtained corresponds to a relative error of 38.4%. **KEYWORDS:** Inclined plane; Moment of inertia; Pure rolling.

Introdução

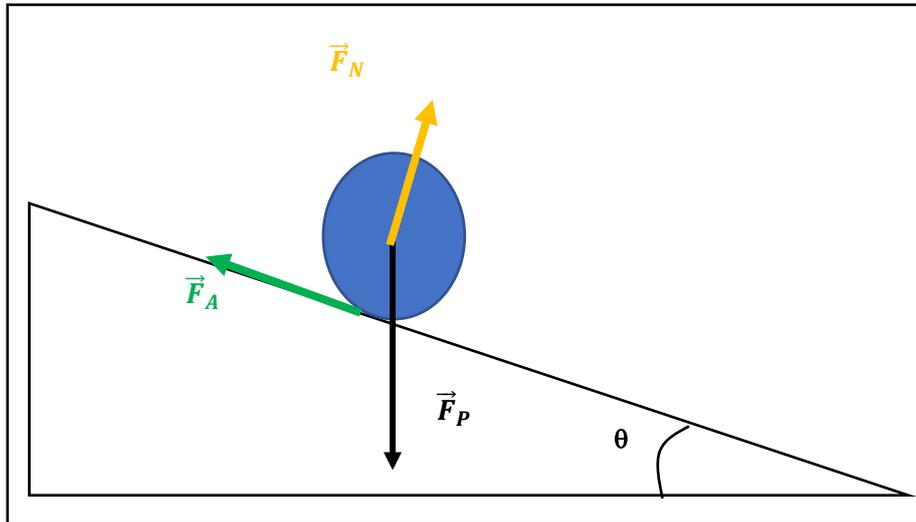
Propõe-se neste trabalho descrever a construção de um plano inclinado com uma calha como guia de uma esfera. Objetiva-se estimar o valor da aceleração da esfera no seu movimento descendente e mostrar que o seu momento de inércia tem influência fundamental para o resultado. No experimento, sensores de presença acoplados ao plano inclinado registram os intervalos de tempo de passagem da esfera. A agilidade na obtenção de dados, permite uma abordagem conceitual prévia e pós os resultados, bem como privilegiar o caráter numérico. Neste sentido, a atividade em laboratório pode se tornar mais propensa à reflexão dos conceitos envolvidos.

Fundamentação teórica

Propõe-se um experimento para obtenção do valor da aceleração de uma esfera, em rolamento puro, em um plano inclinado dotado de uma calha como sua guia. Seguindo a proposta newtoniana, representam-se as forças sobre uma esfera, como exemplifica a Figura 1.

Figura 1 – Vista lateral de um plano inclinado com a representação das forças que atuam em uma esfera em rolamento puro (sem deslizamento).

F_A é a força de atrito, F_N é a força normal e F_P é o peso.



Fonte: Autores.

Aplicando a 2ª. lei de Newton (YOUNG & FREEDMAN, 2008, 116), para massa constante, obtém-se para a componente paralela ao plano inclinado

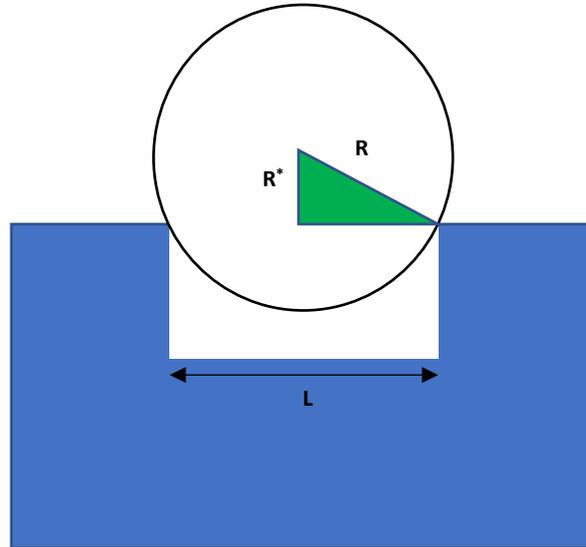
$$|\vec{F}_P| \times \sin \theta - |\vec{F}_A| = m \times |\vec{a}| \quad (1)$$

A esfera percorre uma calha de tal maneira que o contato ocorre em dois pontos. Este detalhe promove um aumento da rapidez angular (JESUS & SASAKI, 2015, 1507.3).

A Figura 2 mostra a relação entre o raio da esfera e a largura da calha.

Figura 2 – Geometria da calha para o rolamento da esfera.

O comprimento L é a largura da calha, R é o raio da esfera e R^* é o raio de rolamento. O raio de rolamento é o raio efetivo pelo qual a esfera gira apoiada na superfície.



Fonte: Autores.

Da 2ª. lei de Newton para as rotações (YOUNG; FREEDMAN, 2008, 320), e utilizando o raio de rolamento, R^* , obtém-se

$$\tau_{FR} = I * \alpha \rightarrow |\vec{F}_A| \times R^* = \frac{2}{5} m \times R \times |\vec{a}| \quad (2),$$

em que τ_{FR} é o torque da força resultante, $I = \frac{2}{5} m \times R^2$ é o momento de inércia da esfera e $|\vec{a}| = |\vec{a}^*| \times R$ é a relação entre aceleração tangencial e aceleração angular.

Substituindo a equação (2) na equação (1), obtém-se

$$|\vec{a}| = \frac{g \times \sin \theta}{1 + \frac{2}{5} \times \frac{R}{R^*}} \quad (3).$$

A aceleração da esfera é obtida da equação (3). Da geometria da calha mostrada na Figura 2,

$$R^2 = R^{*2} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{R}{R^*} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{L}{2R}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (4)$$

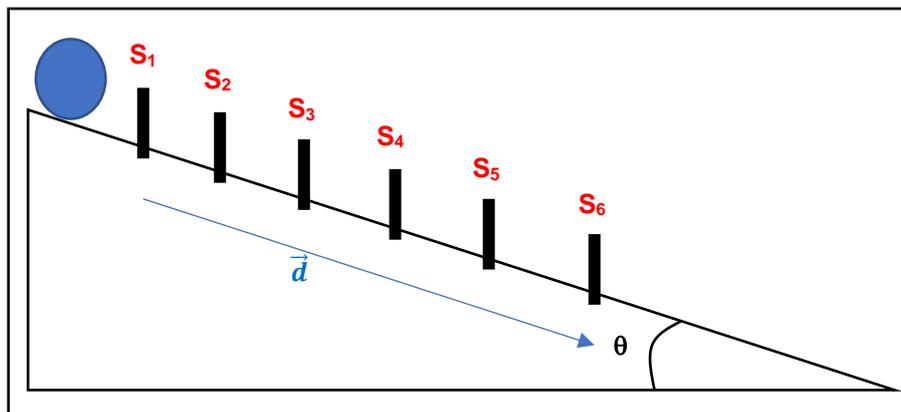
e substituindo a equação (4) na equação (3), obtêm-se a expressão para o cálculo da aceleração teórica da esfera em uma calha

$$|\vec{a}| = \frac{g \sin \theta}{\left\{ 1 + \frac{2}{5 \left[1 - \left(\frac{L}{2R}\right)^2\right]^{1/2}} \right\}} \quad (5).$$

O denominador da Equação (5) provém do momento de inércia da esfera e do seu raio de rolamento. Por outro lado, o numerador corresponde a aceleração de um objeto em deslizamento sem atrito em um plano inclinado.

O aparato experimental contém seis sensores separados por uma determinada distância qualquer. A Figura 3 exemplifica o posicionamento dos sensores.

Figura 3 – Posicionamento dos sensores para detecção da esfera. A posição de cada sensor é obtida do módulo do vetor \vec{d} com origem no sensor S_1 .



Fonte: Autores.

O movimento da esfera é descrito pela equação do MRUV que, em módulo, pode ser escrita

$$d_s = v_i t_s + \frac{a t_s^2}{2} \quad (6)$$

em que \mathbf{d}_s é a distância percorrida pela esfera até um sensor qualquer; v_i é o valor da velocidade inicial da esfera ao passar pelo primeiro sensor; t_s é o tempo transcorrido no percurso da esfera e registrado pelo sensor e \mathbf{a} é a aceleração da esfera. As incógnitas são a velocidade inicial e a aceleração da esfera. Reescrevendo a Equação (6)

$$d_s = t_s \times \left(v_i + \frac{a \times t_s}{2} \right) \rightarrow \frac{d_s}{t_s} = v_i + \frac{a \times t_s}{2} \quad (7),$$

pode-se eliminar v_i escrevendo a partir da Equação (7), uma expressão análoga para um sensor mais afastado,

$$\frac{d_{s^*}}{t_{s^*}} = v_i + \frac{a \times t_{s^*}}{2} \quad (8).$$

A expressão para a aceleração da esfera com os dados experimentais pode ser obtida da subtração da Equação (8) pela Equação (7)

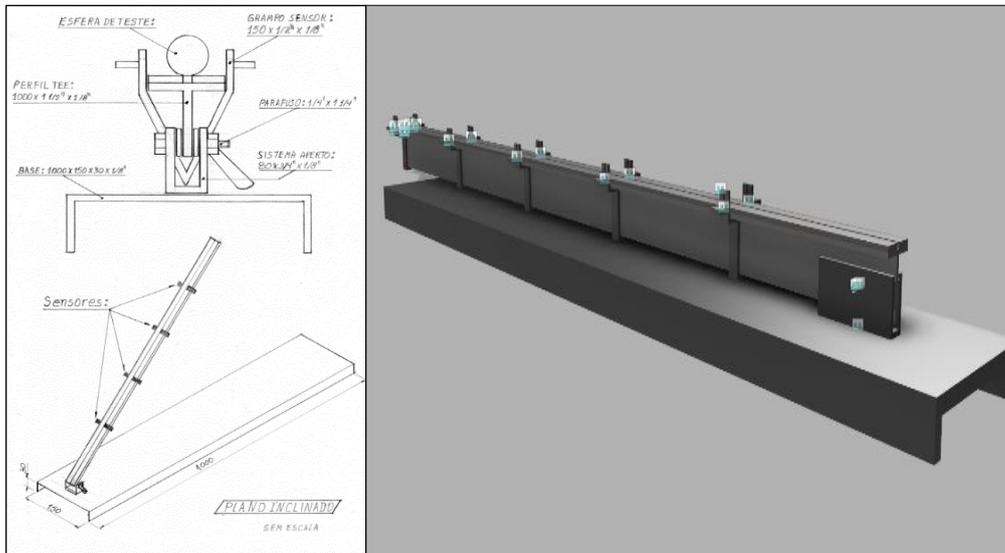
$$\frac{d_{s^*}}{t_{s^*}} - \frac{d_s}{t_s} = \frac{a \times t_{s^*} - a \times t_s}{2} \rightarrow \mathbf{a}_{exp} = \frac{2 \times \left(\frac{d_{s^*}}{t_{s^*}} - \frac{d_s}{t_s} \right)}{t_{s^*} - t_s} \quad (9)$$

em que \mathbf{a}_{exp} = aceleração experimental da esfera; \mathbf{d}_{s^*} = distância percorrida pela esfera até um sensor qualquer mais afastado em relação à d_s ; t_{s^*} = tempo registrado pelo sensor em uma distância maior em relação à d_s .

Desenvolvimento

O trabalho iniciou-se com a confecção de um esboço da estrutura do plano inclinado e a partir deste, gerou-se um desenho em 3D com o auxílio do programa *Fusion 360*. A Figura 4 mostra o resultado obtido.

Figura 4 – Esboço e desenho em 3D confeccionados.



Fonte: Autores.

O material utilizado na estrutura é de aço, na forma de “T”, com 1 m de comprimento. Para elevação do plano inclinado acoplou-se um dispositivo articulado. No entanto, este dispositivo se mostrou pouco prático. A Figura 5 mostra a estrutura do plano com este dispositivo.

Figura 5 – Estrutura do plano inclinado com o braço articulado para elevação, utilizado inicialmente, e presilhas para fixação dos sensores. A perfuração da chapa de aço foi efetuada com furadeira.



Fonte: Autores.

O braço articulado não apresentou praticidade para obter as inclinações. Por outro lado, era necessário conhecer o ângulo. Para atender estas pendências, construíram-se apoios de aço que podem ser posicionados em qualquer ponto na base do plano. Para leitura do ângulo foi acoplado um transferidor no perfil em “T”. A Figura 6 mostra estas mudanças.

Figura 6 – Imagens com o apoio para a obtenção da inclinação e o transferidor para medida do ângulo de inclinação.



Fonte: Autores.

Para aquisição e registro de dados, foram necessários os componentes eletrônicos listados no Quadro 1, além de fios e conectores para montagem do circuito.

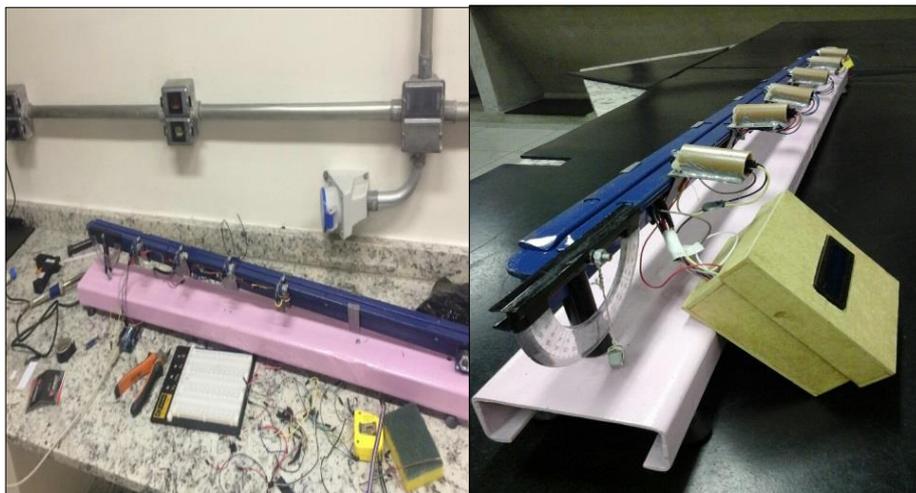
Quadro 1: Componentes Eletrônicos Principais

Componente Eletrônico	Quantidade
Sensor IR de obstáculo	6
Display LCD	1
Fonte 12 V 1 A	1
Microcontrolador ATmega 328	1

Fonte: Autores.

Para o registro dos tempos, elaborou-se um programa em linguagem C. O programa consiste em instruções ao microcontrolador para gerar interrupções na contagem do tempo. Os sensores fixos em determinadas posições detectam a esfera ao passar à sua frente. Percebeu-se que os sensores possuem uma abertura de detecção divergente e atua num plano. Por este motivo, os sensores foram posicionados na vertical. A esfera, ao passar pelo primeiro sensor, aciona a contagem do tempo que é interrompida quando ela chega no segundo sensor. Este tempo é armazenado e exibido no display, enquanto o segundo sensor inicia a contagem a partir do valor armazenado no primeiro. Este procedimento é repetido nos sensores seguintes até a esfera alcançar o sexto sensor. Os tempos registrados correspondem às distâncias percorridas a partir do primeiro sensor. A Figura 7 mostra o plano inclinado finalizado e na fase da montagem do circuito com os sensores e o display LCD, para anotação dos tempos registrados.

Figura 7 – Plano inclinado em construção e finalizado.



Fonte: Autores.

Os sensores óticos são dispostos na vertical para que os cones de detecção registrem a passagem frontal da esfera à localização dos sensores. Em destaque uma caixa em madeira compensada para acomodar o display para anotação dos registros dos tempos da esfera.

Resultados e discussão

A principal fonte de erros, em um experimento como este, é o registro dos tempos. Para a realização deste procedimento de forma manual, é necessário considerar o tempo de reação do experimentador. Considerando um tempo de reação médio de **0,21 s**, observado em jogadores de voleibol (OLIVEIRA et al., 2006, 1514), inviabiliza o resultado. Por outro lado, os sensores possuem um tempo de resposta instantâneo. O Quadro 2 mostra os registros dos 5 intervalos de tempos a partir dos 6 sensores utilizados, e seus respectivos valores de médias e desvios padrão.

Quadro 2: Tempos registrados com os sensores

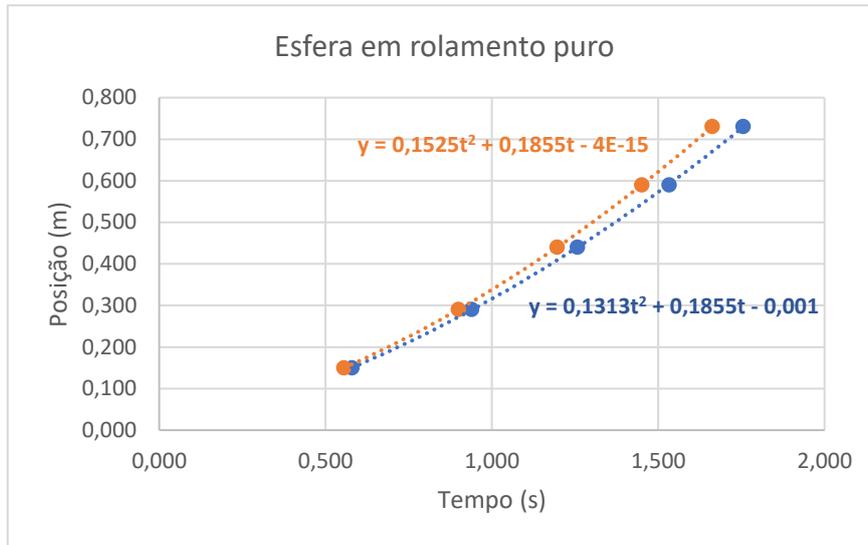
Ensaio	t1 (s)	t2 (s)	t3 (s)	t4 (s)	t5 (s)
Ensaio 1	0,506	0,842	1,147	1,417	1,636
Ensaio 2	0,503	0,837	1,142	1,411	1,629
Ensaio 3	0,499	0,834	1,137	1,406	1,623
Ensaio 4	0,504	0,841	1,146	1,416	1,634
Ensaio 5	0,499	0,842	1,417	1,417	1,636
Ensaio 6	0,502	0,837	1,140	1,409	1,626
Ensaio 7	0,507	0,841	1,144	1,412	1,629
Ensaio 8	0,503	0,839	1,143	1,412	1,630
Tmedio	0,503	0,839	1,143	1,413	1,630
desvio-padrão	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005

Fonte: Autores.

No Quadro 2, os tempos registrados com os sensores, em oito ensaios, são correspondentes a uma esfera com diâmetro de **19,5 mm** solta no topo do plano inclinado, para uma inclinação de **2,5°** e uma calha com **L = 5,5 mm**. Os desvios-padrão relativamente pequenos permitem assumir um valor médio com erro desprezível em relação ao tempo de reação de 0,21 s. Os sensores foram posicionados a partir do primeiro com as seguintes distâncias: **0,150 m, 0,290 m, 0,440 m, 0,590 m e 0,730 m**.

Com os dados referentes aos tempos médios, de acordo com o Quadro 2, e das posições dos sensores, foi construído o Gráfico 1 (curva em azul). Neste mesmo gráfico, apresenta-se a curva em laranja, que representa uma esfera em rolamento puro sem a calha (Equação (5) com $L = 0$), para enfatizar o efeito da perda de energia cinética de translação que a calha proporciona.

Gráfico 1 – Posição versus tempo da esfera em rolamento puro.

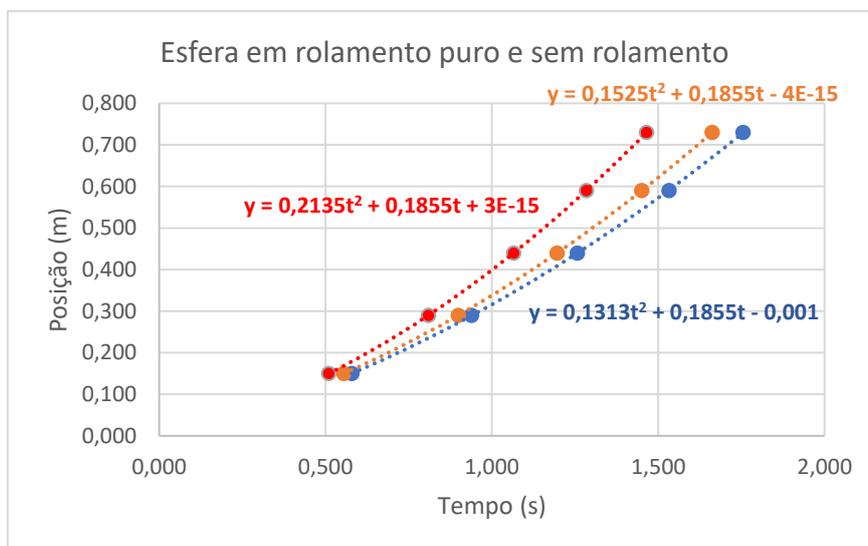


Fonte: Autores.

Os pontos em azul referem-se aos dados experimentais. Os pontos em laranja correspondem aos valores teóricos de um plano inclinado sem calha para a mesma inclinação. As equações mostradas são obtidas dos ajustes de segunda ordem com o programa Excel.

Para analisar o efeito do movimento de rotação da esfera com mais detalhe, foi construído o Gráfico 2.

Gráfico 2 – Posição versus tempo superpostos enfatizando a importância do conceito de momento de inércia da esfera.



Fonte: Autores.

Os dados em vermelho correspondem ao movimento sem rotação e sem atrito. Os dados em laranja e azul correspondem às informações do Gráfico 1.

Neste gráfico, a curva em vermelho corresponde ao movimento teórico sem rolamento e sem atrito (somente o resultado do numerador da Equação (5)), superposto às curvas do Gráfico 1. Observa-se que na ausência de rotação, a energia cinética de translação cresce consideravelmente. Pode-se constatar diretamente deste gráfico, pelas curvaturas mais acentuadas.

O ajuste de segunda ordem do programa EXCEL, revela que a aceleração obtida experimentalmente é compatível com o movimento de rotação da esfera. Isto é, deve-se considerar o momento de inércia dela.

Ainda é necessário considerar o efeito da calha. Esse refinamento faz com que a energia de rotação da esfera aumente, e conseqüentemente, a energia cinética de translação diminua.

Conclusões

Este experimento correspondeu a um trabalho de iniciação científica de alunos de cursos de tecnologia em Fabricação Mecânica e Automação Industrial. O caráter multidisciplinar do experimento permitiu o desenvolvimento de competências de cada um dos cursos envolvidos, tais como: desenho técnico assistido por computador, corte de peças, elaboração de programas computacionais para registro dos tempos dos sensores, construção de circuitos elétricos e bem como a utilização de conceitos da disciplina de Física.

Os valores das acelerações da esfera são obtidos dos ajustes de segunda ordem do EXCEL. Nestes ajustes, o valor mostrado nos termos quadráticos das equações, contidas no Gráfico 2, é metade do valor da aceleração, de acordo com a equação de um MRUV. Desta forma, a aceleração obtida experimentalmente, curva em azul do Gráfico 2, é de $0,263 \text{ m/s}^2$, que corresponde a um erro relativo de 12,6% em relação ao valor teórico obtido da Equação (5) que é de $0,301 \text{ m/s}^2$. Desconsiderando a calha, isto é, com $L = 0$ na Equação (5), a aceleração é de $0,305 \text{ m/s}^2$, que corresponde a um erro relativo é de 13,7%. Por outro lado, se o momento de inércia não é considerado (somente o resultado do numerador da Equação (5)), a aceleração é de $0,427 \text{ m/s}^2$, que corresponde a um erro

relativo de 38,4%. Estes resultados permitem destacar a importância fundamental do momento de inércia para o explicar o resultado.

Por outro lado, a rapidez na aquisição de dados pode contribuir para que as atividades em laboratório explorem a capacidade de análise dos resultados por parte dos alunos. Para finalizar, destaca-se que o aprimoramento na obtenção da inclinação do plano pode melhorar sensivelmente a precisão dos resultados obtidos, pois foi feita de forma visual a partir de um transferidor.

Referências

JESUS, V. L. B.; SASAKI, D. G. G. O experimento didático do lançamento horizontal de uma esfera: Um estudo por videoanálise. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2015, v. 37, n. 1, p.1507.

OLIVEIRA, C.A.; OLIVEIRA, M.A.; SOUZA, A.P. S. Medidas de tempo de reação simples em jogadores profissionais de voleibol. **Lecturas: Educación física y deportes**, n.93, 2006.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I**. 12. ed. v.1. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Enviado em: 16/05/2023